



Universidad Nacional de Lanús
Departamento de Artes y Humanidades
Maestría en Metodología de la
Investigación Científica

La relación entre Alfabetización Académica y el aprendizaje del
Álgebra Lineal en estudiantes universitarios. Experiencia educativa en
un primer ciclo de una carrera de Ingeniería de la Facultad Regional
Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional

Autor: Vicente Rodolfo Messina
Director: Carlos Pano

Lanús, noviembre de 2017

Dedicatoria

A Marcela, Nicolás, Lara y Martín

Agradecimientos

A todos los profesores de la Maestría en Metodología de la Investigación Científica. Especialmente a la Dra. Esther Díaz, al Dr. Juan Samaja, a la Dra. Cristina Ambrosini y al Dr. Andrés Mombrú.

A mi director de tesis Carlos Pano por su infinita paciencia.

A todos los integrantes del grupo de investigación de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional: Gloria Cittadini, Isabel Pustilnik, Alicia Sara, Teresa Gil, Silvia del Puerto y Silvia Seminara.

Índice

Índice	4
Introducción	7
El problema	7
Preguntas de investigación	8
Hipótesis	8
Hipótesis de investigación (H_i)	8
Hipótesis nula (H_0)	8
Hipótesis de trabajo (H_1)	9
Hipótesis estadísticas	9
Objetivos	9
Enfoque	10
Relevancia	10
Capítulo 1: Marco Teórico	12
1.1. Introducción	12
1.2. La noción de Alfabetización Académica	12
1.3. Aprendizaje	14
1.3.1. El constructivismo como concepción en la que se apoya la investigación	14
1.3.2. El Aprendizaje Significativo: Desde Ausubel hasta Moreira	14
1.4. Sobre la evaluación	18
1.4.1. Sobre la innovación en evaluación	19
1.4.2. La evaluación alternativa	20
1.5. Respecto al Álgebra Lineal y la Geometría Analítica	22
1.5.1. El Álgebra Lineal	22
1.5.2. Breve historia del álgebra lineal	23
1.5.3. Las Cónicas y su relación con el Álgebra Lineal	24
Capítulo 2: Revisión de la literatura	28
2.1. Introducción	28
2.2. Revisión de la literatura referida a experiencias realizadas con Alfabetización Académica como eje	28
2.3. Los textos de Matemática. Un análisis estructural	31
Capítulo 3: Metodología	33
3.1. Introducción	33
3.2. La investigación-acción como marco general de nuestro trabajo	33
3.3. Respecto a los tipos de hipótesis	34
3.4. La Teoría de las Matrices de Datos	35
3.5. Análisis metodológico de los trabajos	38

3.5.1. Trabajo 1:	39
3.5.2. Trabajo 2	43
3.5.3. Trabajo 3	44
3.5.4. Trabajo 4	46
3.5.5. Trabajo 5	46
3.5.6. Trabajo 6:	48
3.6. Sobre las hipótesis y el método de evaluación de las producciones de los alumnos	48
Capítulo 4: Resultados	51
4.1. Introducción	51
4.2. Los trabajos	51
Trabajo 1: Análisis de una actividad de comprensión lectora sobre un texto de álgebra con alumnos de la carrera de ingeniería	51
Trabajo 2: La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica	54
Trabajo 3: La comparación del desempeño de dos grupos de estudiantes en la resolución de un problema para evaluar una actividad de alfabetización académica.....	69
Trabajo 4: Las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje que subyacen en un capítulo sobre secciones cónicas.....	75
Trabajo 5: Uso didáctico del error: una experiencia de aula.....	87
Trabajo 6: Palabras cónicas.....	103
4.3. Conclusiones	112
Trabajos 1 al 6.....	112
Recomendaciones.....	113
Trabajos 1 al 6.....	113
Bibliografía.....	115
Anexo: Trabajo 1.....	123
Ejemplos de evaluación de algunos trabajos.....	125
Anexo: Trabajo 2.....	138
Trabajos prácticos desarrollados para la actividad de Escritura Académica	138
Trabajo Práctico 2	138
Trabajo Práctico 3	139
Trabajo Práctico 4	140
Trabajo Práctico 5	141
Trabajo Práctico 6	142
Anexo: Trabajo 3.....	144
Enunciado del Trabajo Final	145
Escrito de un alumno del curso Experimental.....	145
Escrito de un alumno del curso Control.....	145

Índice de tablas

Tabla 1. Matrices de contexto, de Datos, de Componentes.	37
---	----

Tabla 2. Relaciones jerárquicas que presenta nuestro sistema de matrices	37
Tabla 3. Sistema de matrices de datos del trabajo 1.....	40
Tabla 4. Sistema de matrices de datos del trabajo 2.....	44
Tabla 5. Sistema de matrices de datos del trabajo 3, curso experimental	45
Tabla 6. Sistema de matrices de datos del trabajo 3, curso control.....	46
Tabla 7. Niveles de hipótesis en nuestro trabajo	48
Tabla 8. Semejanzas entre la metodología empleada en nuestros trabajos y la evaluación QSA49	

Introducción

El problema

En la educación superior y en particular en la educación universitaria en carreras de ingeniería se presenta el problema de la lectura y escritura académica. Existen gran cantidad de estudios que ponen de manifiesto las dificultades que se les presentan a los estudiantes al momento de interpretar consignas, enunciados de ejercicios y problemas. También aparecen dificultades con la lectura de un texto matemático, por su simbología y por los términos propios no siempre conocidos. La escritura de los exámenes o de los informes que se les piden a los estudiantes muestran deficiencias. La comunicación oral es un tanto oscura y carece de la precisión que requiere la matemática. Se suman dificultades para la comprensión del discurso del docente en las clases.

Los trabajos de Dorier, Robert, Robinet y Rogalsky (2000) muestran que existe un obstáculo didáctico en la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal. Éste es el formalismo matemático que deviene de la estructura axiomática de la disciplina.

Cuando conceptos, como el de combinación lineal, independencia, subespacio, dimensión o base se presentan en forma abstracta y luego se las utiliza para largos desarrollos teóricos sin mostrar ejemplos o aplicaciones también se convierten en obstáculos.

Carlson, Johnson, Lay y Duane Porter (1993) ponen de manifiesto que los temas del Álgebra Lineal tienen poca relación con el curriculum matemático de la escuela media, aunque algunos tópicos los considera. De modo que el estudiante puede conocer, por ejemplo, como se resuelven sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas, pero quizás desconoce su relación con objetos de la geometría como planos o rectas en el espacio tridimensional. Si la enseñanza del álgebra lineal sigue el camino del formalismo, los descubrimientos de las conexiones de sus objetos con las concepciones previas del alumno quedan a cargo del propio estudiante.

Sierpinska, Defence, Khatcherian y Saldanha (1997) afirman que en el desarrollo de los temas del álgebra y la geometría analítica coexisten tres lenguajes: geométrico, aritmético y algebraico, que se corresponden con tres modos de pensamiento o modos de razonamiento. El lenguaje geométrico se refiere al lenguaje utilizado para nombrar en el plano o en el espacio de tres dimensiones, a los objetos como punto, recta, plano, polígono o poliedro. Los autores señalan que, a este lenguaje, le corresponde el pensamiento sintético-geométrico. Sintético en el sentido que los objetos son preexistentes, por ejemplo, se puede hablar de las propiedades de una recta, pero no se define la recta. El lenguaje aritmético utiliza términos como n -uplas, matrices, rango, soluciones de sistemas de ecuaciones. Este lenguaje se corresponde con el modo de pensamiento analítico-aritmético. En este caso analítico se refiere a los objetos que son dados indirectamente, es decir, son contruidos por definiciones. Por ejemplo, la recta se puede nombrar por una ecuación contruida a partir de las coordenadas de dos puntos de un espacio de dimensión dada. En el lenguaje algebraico se emplean términos como espacios vectoriales, subespacios, dimensión, transformaciones lineales, núcleo. El modo de pensamiento asociado en este caso es el analítico-estructural. Lo estructural se refiere a que los términos nombran elementos relacionados con estructuras algebraicas.

Estos lenguajes y modos de pensamiento coexisten, son intercambiables, pero no son equivalentes. De modo que las dificultades para el estudiante son: conocer como están relacionados estos modos de pensamiento y lenguajes, decidir cuándo es conveniente utilizar uno u otro y como lograr la conversión de un lenguaje a otro. De acuerdo con la teoría de las

representaciones semióticas de Duval (1999), sabemos que no es trivial la operación de conversión entre registros o representaciones semióticas. Y en caso del Álgebra Lineal el pasaje de un registro a otro, es decir, esta operación cognitiva de conversión, juega un papel importante en el aprendizaje. En relación a esto Douady (1984) explica que muchos conceptos matemáticos operan en distintos marcos (físico, geométrico, numérico, gráfico, literal), y los cambios e interacción entre ellos permite el progreso del conocimiento. Dogan-Dunlap (2010) señala que la representación geométrica (por ejemplo, el vector como flecha) no es equivalente a la representación aritmética (el vector como una terna ordenada de números reales) o algebraica (el vector de un espacio vectorial) pero alienta al estudiante a utilizar diferentes tratamientos y conversiones entre las representaciones. En particular la representación geométrica enriquece y provee una base para la manipulación de la aritmética y la algebraica.

Además, Abate y Badenes (2001) señalan que se presenta el problema de la traducción del lenguaje cotidiano al formalizado de la Matemática cuando estudian la comprensión lectora de alumnos ingresantes a las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de la Plata.

Todo lo anterior nos lleva a plantearnos las siguientes cuestiones

Preguntas de investigación

¿Debieran los profesores universitarios preocuparse por alfabetizar académicamente en las disciplinas que enseñan?

En particular

¿Quiénes enseñamos Álgebra y Geometría Analítica debiéramos preocuparnos en alfabetizar académicamente en esta disciplina?

Esto nos conduce a las siguientes

Hipótesis

En este apartado formulamos las hipótesis siguiendo las recomendaciones de Ibáñez Brambila (1995).

Hipótesis de investigación (H_i)

El aprendizaje del álgebra lineal mejora con intervenciones docentes que incorporan tareas de alfabetización académica

Hipótesis nula (H_0)

El aprendizaje del álgebra lineal no mejora con intervenciones docentes que incorporan tareas de alfabetización académica

Hipótesis de trabajo (H_1)

El curso de Álgebra y Geometría Analítica, de la Facultad Regional Buenos Aires, de la Universidad Tecnológica Nacional, que incorpore tareas de alfabetización académica obtendrá mejor rendimiento en la resolución de un problema que otro que no las incorpore.

Hipótesis estadísticas

Estas hipótesis se mencionan en el Trabajo 3 (p. 72)

Objetivos

Crear las condiciones de posibilidad para el despliegue del proceso de investigación, que requiere poner a prueba la hipótesis de investigación enunciada, nos lleva en primer lugar a plantearnos un **objetivo general**:

Crear situaciones de enseñanza para mejorar los aprendizajes del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica incorporando la Alfabetización Académica.

Los **objetivos particulares** son:

1. Conocer el estado de alfabetización académica de los alumnos que comienzan a cursar la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, en el primer nivel de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.
2. Proponer actividades alfabetizadoras académicamente para desarrollar en entornos de aprendizaje virtual.
3. Determinar los términos y símbolos del lenguaje específico del Álgebra y Geometría Analítica que requieran acciones de alfabetización académica.
4. Evaluar el rendimiento en la resolución de un problema a posteriori de las intervenciones de alfabetización académica en un curso de la asignatura.

Para alcanzar el objetivo particular uno se elaboró, se puso en práctica y se evaluó una actividad que se relata en el Trabajo 1 (p. 46). Donde la intención fue hacer observable la variable comprensión Lectora Académica de los alumnos de un curso. El análisis metodológico de este trabajo y los restantes se detallan en el Capítulo 3.

El objetivo dos nos llevó a desarrollar una actividad de alfabetización académica como horizonte y como camino, enfocada en la escritura académica. Es decir, pensar una actividad donde no sólo la matemática fuera lo importante, sino que, además, el lenguaje en general y el lenguaje de la matemática, en particular, utilizado por el alumno se pusiera de manifiesto,

luego de haber leído académicamente un texto. Esta experiencia hizo posible observar la variable Escritura Académica. La actividad se desarrolló a lo largo de un cuatrimestre y se narra en el Trabajo 2. (p. 54)

Para cumplir con el objetivo tres se elaboró y aplicó un cuestionario (p.99) a los docentes de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, para conocer los términos o conceptos, que, a su criterio, son importantes en el tema: Secciones Cónicas.

El objetivo cuatro nos llevó a realizar un experimento involucrando a dos cursos, uno tomado como curso control y el otro como curso experimental. La intención fue hallar argumentos a favor de nuestra hipótesis respecto al tratamiento aplicado al curso experimental. La experiencia se expone en el trabajo 3 (p. 69)

Enfoque

Una vez planteado el problema dirigimos nuestra atención hacia los posibles enfoques que dieran respuesta a esta problemática. Decidimos seguir la noción de Alfabetización Académica, luego de leer las investigaciones de Carlino (2002a, 2002b, 2002c,) y de Thaiss, C., Bräuer, G., Carlino, P., Ganobcsik-Williams, L. y Sinha, A. (2012).

También los trabajos sobre Escritura a Través del Curriculum, de Baserman, C., Little, J., Bethel, L., Chavkin, T., Fouquette, D., y Garufis, J. (2005, pp. 57-65). Donde podemos leer que *escribir para aprender* tiene base en que el pensamiento y la comprensión de los estudiantes pueden crecer y clarificarse a través del proceso de escritura. En la misma línea el texto de Baserman (2008) es un compilado de distintos autores, cuyos trabajos reseñan las actividades desarrolladas. Baserman, en el primer capítulo, nos narra cómo fue evolucionando este concepto. En el capítulo 19 Boscolo plantea a la escritura como actividad social, es decir, como una forma de interactuar en el aula, como dialogo social, como colaboración entre pares o como una herramienta para convertirse en miembro de una comunidad. En el capítulo 21 Haswell habla sobre escribir para aprender en la educación superior. En el capítulo 23 Murphy y Yancey señalan cuales son los conceptos claves para lograr constructos válidos para evaluar a través de la escritura.

El texto de Baserman (2010) puede ser de ayuda para aquellos docentes y alumnos que les interesa profundizar en las técnicas de lectura y escritura. Cómo por ejemplo aprender a utilizar distintas fuentes, como escribir un artículo científico, como escribir un ensayo, como leer y escribir sobre experimentos en ciencias, como leer y escribir acerca de teorías, entre otros.

Relevancia

Contrariamente a la creencia popular, en las ciencias exactas en general, y en la matemática en particular se debe leer y escribir académicamente, mucho y bien. Los ingenieros necesitan leer manuales técnicos que muchas veces contienen fórmulas matemáticas, producir informes claros para los destinatarios que lo requieran, presentar proyectos que incluyen cuestiones matemáticas. La labor del matemático requiere un manejo profundo del lenguaje simbólico para comunicar en forma precisa ideas complejas. Como educadores en matemáticas debemos ocuparnos de la alfabetización académica matemática en nuestras actividades de enseñanza. Sin embargo, existen otras motivaciones para ocuparse de la lectura y escritura académica en la Universidad. La lectura académica permite construir sentido sobre lo que se lee (Solé,

2002:19) y la escritura académica permite clarificar el pensamiento y transformar el conocimiento (Carlino, 2006, p.98).

El desarrollo de actividades que involucren a la lectura y la escritura académica para aprender matemática, mediadas por las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), las consideramos como una innovación, en el sentido señalado por Salinas Ibáñez (2008):

La innovación se refleja en acciones que producen cambios en las prácticas, implicando pues, transformación de las prácticas educativas. Se trata de un proceso intencional y planeado, que se sustenta en la teoría y en la reflexión, que responde a las necesidades de transformación de las prácticas para un mejor logro de los objetivos de éstas. En la investigación, la respuesta al problema implica generación de conocimiento (teorías, modelos, ideas, materiales). Desde esta perspectiva, la investigación educativa se nos presenta como la forma natural y deseable de llegar a la innovación (transformación de las prácticas). (Salinas Ibáñez, 2008, p. 18)

El desarrollo permanente de nuevas tecnologías, las transformaciones sociales que ocurren y el papel fundamental que juega el conocimiento en la época actual requieren un modelo innovador de universidad. La UNESCO concibe que este nuevo modelo:

[...] debería estar centrado en el estudiante, lo cual exige, en la mayor parte de los países, reformas en profundidad y una política de ampliación del acceso, para acoger a categorías de personas cada vez más diversas, así como una renovación de los contenidos, métodos, prácticas y medios de transmisión del saber, que han de basarse en nuevos tipos de vínculos y de colaboración con la comunidad y con los más amplios sectores de la sociedad.(Declaración Mundial sobre Educación Superior en el siglo XXI: visión y acción 1998, pp.25-26)

Conformes con el párrafo anterior queremos estudiantes activos, protagonistas de su aprendizaje y que aprendan a resolver problemas reales que afecten a su comunidad.

Creo que con esta tesis he aportado conocimiento en áreas como Didáctica de la Matemática, Alfabetización Académica, aplicación de TIC a la educación.

Romer (1986, p.1006) señala que el conocimiento es el único recurso ilimitado, el único activo que aumenta con su uso. Con esta tesis tuve la intención de generar conocimiento aplicable alineado con esta idea.

Capítulo 1: Marco Teórico

1.1. Introducción

En este capítulo presentamos un bosquejo de la noción que nos guía en este trabajo, es decir, la Alfabetización Académica. Reconocemos que para favorecer la construcción del conocimiento es importante ir dejando los aprendizajes repetitivos en los que los alumnos se limitan a repetir lo que debieran comprender, quizás por falta de interés o esfuerzo, falta de preparación o conocimientos previos que les impide una visión global y personal de los temas, la falta de planificación del estudio, o también la forma como se le presenta la información o como se evalúa. Consideramos que para lograr un aprendizaje constructivo es necesario orientar el aprendizaje hacia la comprensión, en lugar de promover la mera repetición de lo aprendido, fomentar el uso estratégico de los conocimientos adquiridos de forma que permitan afrontar la solución de problemas o tareas nuevas, en lugar de limitarse a aplicar esos conocimientos de modo rutinario a ejercicios conocidos.

Para lograr este tipo de aprendizaje es necesario aumentar el nivel de compromiso del alumno con sus estudios. Es decir, que las actividades cognitivas implicadas vayan de las más pasivas hacia las más activas. Por ejemplo, si el docente pasa de las clases magistrales a las clases cuyo aprendizaje esté basado en la resolución de problemas, se favorece que el alumno pase en forma creciente a aplicar procesos cognitivos superiores. Es decir, los niveles de compromiso del alumno irán desde la memorización a tomar apuntes, reconocer, relacionar, aplicar, crear, reflexionar hasta teorizar (Biggs y Tang, 2011).

Indicamos el marco de evaluación adoptado, y señalamos porque la consideramos como una evaluación innovadora. Presentamos una breve reseña histórica del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica para mostrar cómo se fueron entrelazando estas disciplinas a lo largo de su historia.

1.2. La noción de Alfabetización Académica

En la educación superior

La escritura suele ser considerada una técnica separada e independiente, algo que debería haber sido aprendido en otra parte, enseñada por otro – en la secundaria o al entrar en la universidad- De aquí surge la casi universal queja sobre la escritura de los estudiantes y el también omnipresente rechazo a hacerse cargo de su enseñanza. (Russell, 1990, p.55)

Carlino (2005) señala que en el aprendizaje de una asignatura es necesario apropiarse de algunas de las formas de razonamiento instituidas en esa cultura discursiva. En la comprensión de una disciplina, la lectura, la producción y el análisis de textos son componentes importantes. Porque leer y escribir en educación superior forman parte del quehacer académico. Es decir, escribir sobre las nociones que se estudian en las asignaturas convoca al pensamiento y a la reflexión sobre los conceptos involucrados, son los especialistas los que mejor pueden ayudar con la escritura en la disciplina que enseñan. El problema de la lectura y de la escritura en la educación superior no se debe exclusivamente a

las deficiencias que los estudiantes puedan traer de los niveles educativos anteriores, sino que existe una dificultad inherente a cualquier intento de aprender algo nuevo.

Acordamos que la alfabetización académica no es un enfoque que pretende remediar deficiencias en la formación previa, sino que implica que cada una de las cátedras esté dispuesta a abrir las puertas de la disciplina que enseña, (Carlino, 2007).

Respecto a la lectura convenimos en que es un proceso de comunicación en el cual el lector decodifica una serie de símbolos. Además, comprende palabras, oraciones, textos y las relaciones entre los mismos. Este proceso es interactivo y complejo porque el lector construye el significado a partir de la información del texto y de lo que tiene en su memoria, (Matteucci, 2008). De modo que la comprensión lectora podría situarse entre dos niveles. El dominio de la memoria y el aprendizaje significativo, es decir, podemos hablar de una comprensión lectora superficial memorización del texto y una comprensión más profunda, el aprendizaje del texto, (Pozo, 1999). De acuerdo con Rosembat (2002) es un proceso transaccional, relativo, recíproco, entre lector y texto que dependen de la cultura, del momento, del contexto en el cual se halla inmerso el lector. Texto y lector interactúan y se modifican mutuamente.

En McGinley (1992) se hace referencia a una serie de estudios a partir de los cuales se infiere que la lectura y escritura de textos académicos contribuyen en forma importante en la comprensión de un tema. Además, señala que las tareas solicitadas a los estudiantes están fuertemente relacionadas con las operaciones de pensamiento implicadas y las demandas cognitivas que conllevan. De acuerdo con estos estudios la escritura de informes o ensayos favorece el aprendizaje, antes que otras tareas como tomar apuntes, responder a una guía de estudio o subrayar un texto.

Sabemos que leer y escribir no se termina de aprender ni de enseñar cuando finaliza la escuela obligatoria. Por eso para que el alumno logre comunicarse académicamente debe saber cómo elaborar ideas en torno al tema que se escribe y jerarquizar y seleccionar estas ideas en función de las pautas y consignas que se le ofrecen para guiar su aprendizaje.

Con lo cual abrir las puertas de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica nos compromete a facilitar la participación de los alumnos en actividades que promuevan un uso epistémico de la lectura y la escritura académica.

Carlino (2013) propone una nueva definición de alfabetización académica en la que distingue alfabetización académica de literacidad. La primera como el quehacer académico mencionado más arriba y la segunda como conjunto de prácticas culturales en torno a textos. Es decir, se abren dos caminos de investigación. Por uno se precisa indagar los modos de enseñar que propicien el acceso de los alumnos a las culturas letradas de las distintas disciplinas, y por el otro investigar las prácticas docentes, esto es, las formas de las interacciones en clase que permitan el trabajo con los textos que han de producirse y comprenderse para aprender la asignatura, las intervenciones de los profesores que faciliten la participación de los alumnos, los dispositivos institucionales que apoyen las alfabetizaciones académicas, las indagaciones de corte lingüístico y etnográfico, que describan los discursos especializados y las prácticas con textos de cada comunidad disciplinar. De modo que se presentan dos clases de investigación la didáctica-educativa y la lingüística-etnográfica.

1.3. Aprendizaje

1.3.1. El constructivismo como concepción en la que se apoya la investigación

Esta corriente como propuesta epistemológica surge en oposición al positivismo de los modelos conductistas. Algunos autores cuyos aportes a esta perspectiva son Piaget, Ausubel, Novak, Vygotsky, Maturana, von Glaserfeld. Bruner.

Para el constructivismo el conocimiento no es una copia de la realidad, se parte de considerar que la visión de la realidad no es una imagen verdadera que existe fuera de nosotros, sino una construcción propia de cada ser humano, progresiva, dinámica, que evoluciona a través de procesos de reestructuración que desencadenan la interacción y la confrontación de ideas en experiencias sociales. Aprender desde esta visión significa construir y reconstruir los conocimientos en una actividad mental interna del sujeto que aprende en un contexto.

El constructivismo tiene múltiples connotaciones en Psicología y Educación. Es nuestra intención enfocarnos en la concepción educativa y epistemológica.

Desde el enfoque constructivista cada individuo, como también los grupos de individuos se considera que construyen ideas acerca del funcionamiento del mundo. Se reconoce que los individuos construyen significados diferentes. Porlán, García y Cañal (1997), afirman que esta forma en que los individuos dan sentido al mundo varía ampliamente y los puntos de vista individuales como los colectivos, cambian con el tiempo. Esta posición constructivista implica preguntas epistemológicas como: ¿quién conoce? ¿cómo conoce?, ¿qué conoce?, ¿qué es conocer? (Rosas, Sebastián, 2013)

De modo que las habilidades para enseñar deben incluir la investigación de las diferentes maneras en que se construyen los significados y las formas de intervenir que las mejoran. Desde este enfoque, las prácticas docentes se deberán orientar hacia el conocimiento de los procesos de aprendizaje de las personas y de los procesos de construcción del conocimiento. Consideramos que el constructivismo nos sugiere las acciones a seguir por el investigador en educación.

1.3.2. El Aprendizaje Significativo: Desde Ausubel hasta Moreira

1.3.2.1. La propuesta de Ausubel

Ausubel (1997) propone una explicación teórica del proceso de aprendizaje, parte de la premisa de que existe una estructura en la cual se integra y procesa la información. Esta estructura se organiza con las creencias y conceptos que el individuo posee y la define como subsumidor o concepto integrador. Existirá una interacción cognitiva entre la información por adquirir y el conocimiento previo, es lo que Ausubel llama aprendizaje significativo.

El caso del aprendizaje significativo subordinado, es aquel en que los conceptos y proposiciones potencialmente significativas interaccionan en forma no arbitraria ni literal con un subsumidor. Un conocimiento o un material potencialmente significativo es un conocimiento que debe tener un significado lógico para el estudiante, que debe tener los subsumidores pertinentes y una predisposición para aprender, es decir, querer transformar el significado lógico de ese material en psicológico.

Si el nuevo conocimiento es asimilado a la estructura cognoscitiva del alumno este conocimiento significativo y el subsumidor se modifican mutuamente. En este caso existe una relación de subordinación entre el conocimiento a adquirir y el subsumidor que lo incluye. Durante un tiempo, la nueva información puede ser evocada casi en forma original, pero con el paso del tiempo ya no podrá disociarse del concepto-anclaje original al cual fue incluido. En este caso se dice que la inclusión es obliterada. Este concepto de inclusión no significa olvido al modo del aprendizaje memorístico, sino que existe un residuo, una obliteración de los anteriores conocimientos que permitirán en el subsumidor modificado la asimilación de nuevos conocimientos.

Este conocimiento previo o estructura cognitiva en el momento del aprendizaje, debe ser tomado en consideración al planificar, de forma tal que sea el anclaje para los nuevos conocimientos. Se debe considerar tanto la existencia de ideas de anclaje pertinentes al contenido referido a una determinada área del conocimiento. Como así también a la estabilidad, claridad y la organización de esas ideas.

Cuando un conocimiento potencialmente significativo es más inclusivo que las ideas o conceptos que posee la estructura cognitiva del sujeto, este conocimiento, es adquirido por medio de estos y es asimilado. Este tipo de aprendizaje se denomina superordenado. El aprendizaje de conceptos o proposiciones que no logren subordinarse a un subsumidor se considera combinatoria.

Ausubel propone tres tipos de aprendizajes significativos: El representacional, aprendizaje del significado de símbolos. El conceptual considerado como un caso especial del aprendizaje representacional ya que los conceptos también se representan por símbolos, y el aprendizaje proposicional que se refiere a los significados de ideas expresadas por grupos de palabras combinadas en proposiciones.

En la dinámica de la estructura cognitiva debe considerarse la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora. Es decir, en el aprendizaje subordinado un concepto es subsumido y el subsumidor es modificado. La reiteración de este proceso lleva a la diferenciación progresiva del concepto integrador. En el caso del aprendizaje superordenado y el combinatorio los nuevos aprendizajes pueden reorganizarse y adquirir nuevos significados en la estructura cognitiva. A esto Ausubel lo define como reconciliación integradora.

El autor señala que aprendizaje memorístico o mecánico se caracteriza como un almacenamiento arbitrario, literal, sin significado, no requiere comprensión, y se aplica mecánicamente a situaciones conocidas. Precisamente todo el énfasis de la teoría se pone en el aprendizaje significativo, frente al memorístico. Aunque no descarta este tipo de aprendizaje y considera que es necesario cuando un individuo adquiere por primera vez conceptos de un área de conocimiento que es completamente nueva para él. De esta manera puede comenzar a generar subsumidores y relacionar conceptos aislados que había adquirido mecánicamente.

1.3.2.2. La visión humanista de Novak

El aprendizaje significativo subyace bajo la integración constructiva del pensar del sentir y el actuar. Joseph Novak, colaborador de Ausubel, propone una visión más humanista del aprendizaje significativo, ya que sostiene que la integración entre pensamientos, sentimientos y acciones conducen al mejoramiento humano.

La propuesta de Novak, podría ser explicada en los siguientes términos: La integración entre sentir, actuar y pensar nos conduce a un aprendizaje significativo. Existe una interacción entre

los conocimientos previos del alumno y los nuevos conocimientos. Cuando ocurre esta interacción, los nuevos conocimientos toman significados psicológicos y los viejos conocimientos también adquieren nuevos significados. Esta actividad implica pensamiento, y esto a su vez implica fundamentalmente lenguaje. Existe una mediación semiótica que es indispensable para el aprendizaje significativo.

Como estrategia, facilitadora del aprendizaje significativo Novak propone el concepto mapa conceptual, que es mucho más que una técnica para representar el conocimiento en forma gráfica, es un modo de organizar los conceptos importantes para alcanzar relaciones significativas. Este recurso didáctico puede emplearse en distintos momentos de la situación de aprendizaje, tanto para generar ideas, representar estructuras complejas, comunicar ideas elaboradas, integrar conocimientos a partir de una base común, evaluar conocimientos de un tema específico.

Los mapas conceptuales como estrategias facilitadoras del aprendizaje significativo presentan las siguientes ventajas:

- permite una exploración de la jerarquía conceptual incorporada. El mapa conceptual es una comunicación con la estructura cognitiva y permite exteriorizar lo que el alumno ya sabe,
- permite evaluar la jerarquía conceptual incorporada, un mapa cuyas jerarquías conceptuales parecieran estar invertidas podría estar indicando una confusión en el alumno.
- estimula la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora, a través de las comparaciones de los mapas que realizan los alumnos antes y después de haber tratado un tema o la comparación con los mapas de distintos alumnos sobre el mismo tema, esta dinámica generará discusiones en las que el alumno se hace consciente de nuevas relaciones entre los conceptos adquiridos y los errores que puede haber cometido,
- es un recurso para el diseño de material curricular porque es útil para encontrar ejes conductores en la secuencia de temas de aprendizaje.

1.3.2.3. Visión interaccionista de Gowin

En la perspectiva de Gowin los nuevos significados son negociados y compartidos entre un mínimo de dos personas, que tienen una participación activa en el proceso de enseñanza aprendizaje. La interacción social es la que permite la negociación de los significados, que ya han sido socialmente aceptados. El objetivo es compartir significados acerca de los materiales educativos del currículum. El profesor es quien domina los significados aceptados en la disciplina que enseña, quien presenta esos significados y quien busca evidencias de que el alumno asimiló esos significados. El alumno debe verificar que está captando los significados aceptados en el contexto de la materia de enseñanza. La construcción de conocimiento, para Gowin, ocurre en un medio social, histórico y cultural.

Este autor propone estrategias facilitadoras para el aprendizaje significativo como la V heurística, V epistemológica o V de Gowin. Es una propuesta de utilidad para analizar el proceso de producción de conocimiento por parte del alumno.

1.3.2.4 Visión crítica de Moreira

Neil Postman y Charles Weingartner publicaron en 1969 *Teaching as a subversive activity*. Marco Antonio Moreira (2005) rescata el significado de aprendizaje subversivo como

estratégico para sobrevivir en nuestra sociedad y lo traslada a su versión de aprendizaje significativo crítico.

La propuesta de Postman y Weingartner es promover una educación que prepare a los alumnos para vivir en una sociedad caracterizada por el rápido cambio de conceptos, valores y tecnologías. Como estrategia proponen trabajar para erradicar siete conceptos. El de certeza como única respuesta posible; el de verdad absoluta, fija e inmutable; el de identidad aislada y eterna; el concepto de estados fijos y “cosas” fijas cuyo nombre le da sentido; el de causalidad simple donde cada efecto es el resultado de una única causa; el concepto de que las diferencias existen en los opuestos solamente, y por último, el concepto de que el conocimiento es transmitido de una autoridad superior sin ser cuestionado.

Estas concepciones tienen que ver con una herencia positivista relativa a la imagen de ciencia que sigue presente en algunas prácticas educativas.

De acuerdo con Moreira aún la práctica escolar sigue sin fomentar el aprender a aprender. La escuela sigue sin incentivar la construcción de significados. No obstante, se agregaron, de hecho, a la lista de Postman tres conceptos más. El de información necesaria, buena y abundante; el de idolatría tecnológica asociada al progreso y calidad de vida, y el concepto de consumidor consciente de sus derechos.

La respuesta de Moreira es que la salida posible sería implementar el aprendizaje significativo crítico a partir de nueve principios rectores.

El principio de la interacción social y del cuestionamiento basado en la idea de enseñar a preguntar, constituye el primer principio, ya que la pregunta es una de las fuentes del conocimiento.

El segundo principio es el de la no centralidad del libro de texto, es el que promueve el uso de documentos, artículos y otros materiales educativos. Este también está en concordancia con la propuesta de Postman en tanto y en cuanto se pueda diversificar los materiales educativos.

El principio del aprendiz como perceptor/representador tiene que ver con la idea de Ausubel donde lo que el alumno recibe, lo percibe, es decir que él decide como representar en su mente al fenómeno en cuestión en función de su experiencia previa. El alumno como perceptor-representador, tiene la capacidad de percibir la relatividad de las respuestas y de las verdades, las diferencias difusas, la complejidad de las causas. Puede asimismo discriminar la información innecesaria, el consumismo, y la tecnofilia.

Pero, debemos tener presente que asociado a la percepción y representación del conocimiento, está el lenguaje dando pie al *cuarto principio: el conocimiento como lenguaje*. Aprender ciencia implica aprender su lenguaje, según Postman no existe nada entre los seres humanos que no esté mediado por el lenguaje ya que lo que percibimos es inseparable de la forma en que hablamos y, por lo tanto, sobre lo que abstraemos.

El quinto principio es el de la conciencia semántica. Moreira insiste en que el significado está en las personas y no en las palabras. La negociación de significados implica compartirlos y en esto es esencial el lenguaje. Con lo cual es necesario tener presente que estos significados son contextuales. El aprendizaje significativo requiere compartir significados y estos significados se expresan en forma personal.

Moreira señala que el aprendizaje crítico implica varias concientizaciones. La primera, que cita se refiere al papel de los conocimientos previos. Para que el aprendizaje no resulte un proceso mecánico el alumno debe poder relacionar los conocimientos previos con el nuevo conocimiento para de esa manera poder atribuir significados a las palabras o términos que están en juego en esa negociación. Sugiere además tener presente que hay niveles de

abstracción variables; y que la correspondencia entre palabras y referentes también es variable, ya que hay palabras más abstractas y otras más concretas y específicas.

El principio de aprendizaje por el error, remite a la búsqueda sistemática del error, ya que, para aprender críticamente, hay que encarar al error como algo natural y aprender a través de su superación.

Otro principio es el de desaprendizaje. Este concepto tiene el sentido de olvido selectivo se debe aprender a desaprender, la visión crítica del aprendizaje se pone de manifiesto al descubrir que un concepto previo impide captar significados, nos indica que no se debe emplear como subsumidor. En este caso preciso no hay que “borrar” un conocimiento existente en la estructura cognitiva, solo hay que advertir no emplearlo como subsumidor o anclaje.

El octavo principio es el de incertidumbre del conocimiento. Está relacionado con los anteriores en lo que respecta al papel del lenguaje. Según Postman las definiciones, preguntas y metáforas son las herramientas principales para construir una visión del mundo a través del lenguaje. En lo que respecta a las definiciones, favorecen al aprendizaje significativo siempre y cuando sean concebidas como instrumentos para pensar dentro del contexto para el cual fueron pensadas. Las preguntas son el principal instrumento intelectual disponible ya que nuestro conocimiento depende de las preguntas que nos hacemos. Las metáforas no son adornos, pero, como docentes, debemos alertar a los alumnos que nuestra visión del mundo se sustenta a partir de las definiciones y las preguntas que creamos, y de las metáforas que utilizamos.

El último principio nos predispone al abandono del pizarrón. Invita al empleo de las múltiples y diversas estrategias que disponemos, en cada entorno, para promover el aprendizaje que permitirá a los sujetos insertarse en su cultura.

1.4. Sobre la evaluación

La evaluación en la universidad por lo general constituye una parte diferenciada y puntual del proceso educativo. Se implementa en instancias formales planificadas al finalizar unidades temáticas, consisten en exámenes parciales y finales, generalmente escritos y separados del proceso de enseñanza y de aprendizaje (Álvarez Méndez, 2003). Desde esta perspectiva la evaluación cumple la función social e institucional de acreditar saberes y habilidades. Esta acreditación se caracteriza por dos puntos, el primero que desvincula el examen del desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje. El segundo que desvirtúa la relación del alumno con el docente en cuanto a que se estudia para aprobar y se enseña lo que se va a evaluar (Díaz Barriga, 1994).

Las evaluaciones centradas en la medición, presupone que la puntuación en una prueba tiene el mismo significado para todos los individuos y que es “objetiva y neutral”.

Desde la perspectiva constructivista nosotros construimos el mundo de acuerdo con nuestros valores y percepciones. El sujeto cognitivo es un constructor activo de sus estructuras de conocimiento. Se evoluciona de un estado cognitivo a otro. Cada teoría, es decir, Piaget, Vygotsky, Maturana, Ausubel, Novak, von Glaserfeld. Bruner trata de explicar la construcción de ciertas estructuras a partir de otras diferentes. De modo que es necesario preguntarse desde el constructivismo ¿qué es conocer?, ¿quién conoce?, ¿cómo conoce?, ¿qué conoce? Con lo cual pensar en una “puntuación verdadera” como se sostiene en psicometría se hace difícil de sostener. Así tenemos que adherir a Sverdlick (2012) cuando expresa:

... ya nadie dude de que aun definiendo operacionalmente las claves de corrección 'la nota' puede diferir si la corrección la efectúan personas diferentes, o incluso la misma persona en diferentes momentos o días distintos; la mística de la 'objetividad' y de la 'neutralidad' continúa vigente". . "En efecto, la lógica positivista que aun prima en la escuela tiene su expresión en la demanda de criterios y parámetros de evaluación 'objetivos', lo que equivale a que sean 'neutros' y 'verdaderos' . Esta idea, asentada en la ilusión de neutralidad o de ecuanimidad de una evaluación 'objetiva', supone que existe un valor de verdad por fuera de la construcción que están haciendo los actores en el momento de la evaluación (Sverdlick, 2012, pp. 150, 151).

De acuerdo con Mateo (2006) el presupuesto implícito en lo que se denomina psicometría clásica está en suponer que existe un constructo que explica la naturaleza de la conducta humana, que se puede definir con precisión y por tanto es posible construir una prueba que nos permita capturar su esencia y medirla. Los modelos conductistas dieron soporte teórico a un universo de pruebas denominadas objetivas.

Por ello buscar significados objetivos en las prácticas escolares sabiendo que el evaluador aporta su subjetividad durante el proceso de evaluar. Subjetividad que está integrada por supuestos previos acerca del objeto a evaluar y por sus supuestos teóricos e ideológicos.

Por ello el evaluador que renuncia a buscar objetividad prefiere el concepto de intersubjetividad. Donde la validación de la información se genera a través de estrategias que permiten a los evaluadores y a los evaluados la posibilidad de acordar o disentir respecto a los resultados de la evaluación. En este caso se posee consciencia que el conocimiento es una construcción social y por lo tanto intersubjetiva, que refleja acuerdos, con lo cual una evaluación intersubjetiva legitima al producto que se obtenga.

1.4.1. Sobre la innovación en evaluación

De acuerdo con Litwin el estilo de enseñanza del docente se muestra en la *configuración didáctica* que desarrolla en su práctica educativa, es decir:

[...] la manera particular que despliega el docente para favorecer los procesos de construcción del conocimiento [...] los modos como el docente aborda los múltiples temas de su campo disciplinario y que se expresa en el tratamiento de los contenidos, su particular recorte, los supuestos que maneja respecto al aprendizaje, la utilización de prácticas metacognitivas, los vínculos que establece en la clase con las prácticas profesionales involucradas en el campo de la de que se trata, el estilo de negociación de significados que genera, las relaciones entre la práctica y la teoría que involucran lo metódico y la particular relación entre el saber y el ignorar (Litwin, 2008, pp. 13-14).

En el mismo sentido Eisner (como se cita en Lucarelli, 2003) propone el concepto de *sintaxis*, es decir, "...la modalidad de cómo se da el ordenamiento de las formas que asume la relación teoría práctica dentro de un conjunto de componentes de la situación didáctica." (Lucarelli, 2003, p.131).

Las experiencias innovadoras se presentan en sintaxis con un alto grado de flexibilidad en sus formas de llevarlas a la práctica y de ser desarrolladas por el estudiante en su proceso de aprendizaje.

De acuerdo con Lucarelli (2003) las experiencias innovadoras en las cátedras universitarias se dan articulando dialécticamente los aspectos teóricos y prácticos de la construcción del conocimiento.

“...Entendemos a la innovación como una selección creadora, una manera diferente a la habitual en la organización y utilización de recursos humanos y materiales para alcanzar fines y objetivos definidos. Por tanto, toda innovación lo es (y se da) en relación a un determinado contexto, de cuya situación habitual tiende a distanciarse la práctica innovativa. En nuestro caso la enfocamos como mejoramiento deliberado, duradero de la situación y poco susceptible de producirse frecuentemente. Por tanto, implica no el remozamiento del sistema didáctico curricular existente, sino su alteración. Es un cambio con ruptura del statu quo, un salto, una discontinuidad que modifica el sistema, impidiendo la mera repetición de las prácticas habituales para alcanzarlo...” (Lucarelli, 2003, p. 152).

1.4.2. La evaluación alternativa

De acuerdo con Darling-Hammond (2014) para muchas personas la evaluación alternativa se define más fácilmente por lo que no es. Es decir, cualquier procedimiento que aplique instrumentos cuyo diseño implique un intento de percibir, captar, discernir el rendimiento en forma distinta de las formas clásicas planteadas por la psicometría, es decir, pruebas de elección múltiple o alguna de las pruebas objetivas centrada en la medición y el control de los resultados, se puede considerar como una evaluación alternativa. Desde esta perspectiva la evaluación alternativa abarca una amplia gama de actividades donde se espera que el alumno construya una respuesta original, antes que reconozca una respuesta potencialmente correcta de una lista predeterminada. Las actividades pueden ser desde completar una frase con unas pocas palabras, pasando por la escritura de un ensayo a la realización de un análisis de una investigación de laboratorio en el cual el alumno participe en forma activa y no sólo como observador.

La evaluación alternativa se presenta como un paradigma de cambio respecto a los modelos de medición hacia modelos donde es parte integral del proceso enseñanza y de aprendizaje. Por supuesto que las evaluaciones acreditativas pueden usarse para el aprendizaje, pero el interés de la evaluación alternativa está en que la valoración es parte esencial del proceso pedagógico, además el alumno es participante activo en la construcción de significado y cuya inserción refleja una valoración de las normas de rendimiento y la necesidad de la metacognición en el aprendizaje (Gips y Stobarts, 2003).

El desempeño de los estudiantes de acuerdo con Darling-Hammond (2014) se juzga con criterios pre-establecidos, basados en el discernimiento humano y apunta a la evaluación de conocimientos complejos y de alto nivel de pensamiento y que tengan relación con contextos reales. Se dice que la evaluación alternativa es auténtica cuando las tareas que el alumno ejecuta tienen como contexto situaciones del mundo real.

Como señala Mateo (2006) cuando aparece un nuevo término, casi al mismo tiempo surgen variaciones en su significado. Este es el caso de la evaluación alternativa, se consideran

sinónimos los términos evaluación alternativa, auténtica y de ejecución. La evaluación auténtica y la de ejecución no son lo mismo. Para que una evaluación sea auténtica las tareas que deben desarrollar los alumnos deben estar asociadas a la vida real. En la de ejecución esta condición no es imprescindible.

En definitiva, la evaluación basada en ejecuciones («performance based assessment») y la auténtica son dos modalidades dentro del denominado enfoque alternativo, en el cual, la evaluación de ejecución requiere que los estudiantes, en un momento determinado, justifiquen, construyan, realicen un producto o solución a partir de pautas determinadas (Gips and Stobart, 2003).

Por su lado Khattri y Sweet (como se cita en Mateo, 2006) señalan que adoptar la evaluación de ejecución implica los siguientes pasos a realizar por los estudiantes:

- Estructurar las tareas objetos de evaluación.
- Aplicar una información previa.
- Construir respuestas.
- Explicar el proceso que les ha llevado a una determinada respuesta.

En el caso de la evaluación auténtica se agrega la realidad como condición para serla y esto la diferencia de la de ejecución.

Un resumen de las características de la evaluación alternativa de acuerdo con Wolf y Reardon (como se cita en Mateo, 2006) son:

- Muestras: experimentos de los alumnos, debates, portafolios, productos de los estudiantes.
- Juicio evaluativo basado en la observación, en la subjetividad y en el juicio profesional.
- Focaliza la evaluación de manera individualizada sobre el alumno a la luz de sus propios aprendizajes.
- Habilita al evaluador a crear una historia evaluativa respecto del individuo o grupo.
- La evaluación tiende a ser idiosincrásica.
- Provee información para actuar sobre el curriculum.
- Permite a los estudiantes a participar en su propia evaluación.

En la búsqueda de una nueva definición del término evaluación educativa Mateo (2006) nos propone una serie de acepciones que a considerar

- La nueva medición y evaluación educativa reconoce el carácter multidimensional y complejo de los dominios y los constructos implicados en su acción. Evaluar los rendimientos no es una ciencia exacta y las interacciones que se establecen entre el contexto, las actividades a realizar y el estudiante hace difícil una generalización a otros contextos o tareas.
- En la evaluación basada en ejecuciones es necesario establecer previamente los estándares de calidad que se persiguen. Dichos estándares orientan el diseño de las pruebas y ayudan a determinar el nivel de logro deseable de la ejecución.
- El proceso evaluativo debe ser compartido con los estudiantes y es imprescindible lograr que sean capaces de auto-monitorizar de forma meta-cognitiva su propio proceso de

aprendizaje. La retroalimentación se convierte en el factor clave para que los estudiantes entren en este tipo de proceso.

- La evaluación educativa debe inducir a los estudiantes a organizar e integrar ideas, e interaccionar con los materiales que componen las pruebas de evaluación, a criticar y evaluar la lógica de las argumentaciones y no simplemente a reproducir hechos e ideas.
- Una evaluación de calidad precisa concretarse en tareas que sean también de calidad, no en ejercicios que hagan perder el tiempo de los alumnos. Las actividades propuestas en las pruebas deben estar orientadas a comprobar objetivos valiosos concretados en tareas significativas y relevantes.
- La evaluación implica puntuar y clasificar las ejecuciones de los estudiantes. Para mejorar la consistencia de las puntuaciones entre los evaluadores, es preciso que estos entiendan claramente las categorías de puntuación y los niveles de ejecución asociadas a ellas. Todo se puede conseguir mediante ejemplificaciones que deberían estar insertadas en el marco de un esquema general de evaluación. Las ejemplificaciones y los estándares son dos instrumentos muy potentes para que los evaluadores comprendan en profundidad la naturaleza de la competencia que están evaluando.
- En las evaluaciones psicométricas el número de ítems contestado es lo que determina la puntuación. En la evaluación alternativa es la calidad general de la respuesta la que determina la puntuación. Se asocian a los sistemas de puntuación categorías descriptivas de los niveles de ejecución de los estudiantes a las pruebas propuestas para su evaluación.
- En relación con la evaluación basada en ejecuciones, se debe asegurar la comparabilidad, es decir, asociar la evaluación a los criterios adecuados, proveer del debido entrenamiento a los evaluadores para hacer más consistentes sus observaciones y sus entrevistas y evitar la tendencia a valerse de estereotipos en la emisión de juicios por parte de profesores y evaluadores.

1.5. Respecto al Álgebra Lineal y la Geometría Analítica

1.5.1. El Álgebra Lineal

Desde hace unos años, Google se ha convertido en el buscador estándar en la red. Uno de sus secretos, quizás la clave del éxito, es el algoritmo que utiliza para ordenar los resultados de la búsqueda. Este algoritmo está construido sobre la base de nociones del Álgebra lineal (Fernandez Gallardo, 2006), de forma que esta disciplina de algún modo nos facilita la vida. Es posible hallar aplicaciones en otros temas como

- En Ingeniería Geofísica, donde existe el problema del Pronóstico numérico del tiempo; algunos modelos cuyo objetivo es la predicción a corto y largo plazo utilizan Álgebra Lineal para obtener sus resultados.
- La investigación de operaciones, que optimiza recursos, se fundamenta en el Álgebra Lineal.
- En Ingeniería de Telecomunicaciones donde obtener cada vez mejores señales de audio y video es tratado desde ésta disciplina.
- En robótica el manejo de los grados de libertad en el diseño de estos dispositivos utiliza matrices
- En cristalografía, la descripción de una red cristalina aplica conceptos vectoriales para describir su estructura

- La telemática, la inteligencia artificial o la percepción remota difícilmente se pueden concebir sin Álgebra Lineal en sus modelos matemáticos.
- Uno de los algoritmos para la reconstrucción de imágenes tomográficas se basa en conceptos del Álgebra Lineal
- En videojuegos para el desarrollo de programas que generan los escenarios, iluminación, determinación de visibilidad. Estos programas son conocidos como motores gráficos en 3D.
- En arquitectura e ingeniería la aplicación de las cónicas es posible contemplarlas materializadas en estructuras como puentes colgantes, torres de enfriamiento de agua en centrales nucleares, en la construcción de techos de grandes espacios libres de columnas.

1.5.2. Breve historia del álgebra lineal.

El Álgebra Lineal es un área de conocimiento que atraviesa todos los temas de la Matemática. El término Álgebra Lineal se impuso en la década del treinta del siglo XX. Anteriormente, siglo XVIII, XIX, los métodos utilizados se denominaban *Métodos Algebraicos Lineales*. Se basa en el estudio de las estructuras de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales y multilineales entre espacios vectoriales. La idea de vector se inicia con el trabajo del matemático irlandés William Hamilton (1805-1865). Su propósito era extender el conjunto numérico de los números complejos, esto lo llevó a crear lo que él llamó cuaterniones y este concepto condujo al desarrollo de los vectores. Históricamente las primeras teorías del Álgebra Lineal estaban relacionadas con la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. A raíz de las investigaciones con estos temas surgió el concepto de determinante. Esta noción y sus propiedades fueron desarrolladas por matemáticos de los siglos XVII a XIX, como Leibniz, Cramer, Vandermonde, Bezout, Lagrange, Laplace, Gauss, Cauchy, Binet, Jacobi, Sylvester, Cayley, Hermite.

El filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), quien junto a Newton impulsó el desarrollo del cálculo infinitesimal, utilizó los determinantes en 1693 en la solución sistemas de ecuaciones lineales. En 1750 Cramer obtiene un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales donde el número de ecuaciones lineales debía coincidir con el número de incógnitas, utilizando determinantes. El término matriz fue creado por Sylvester en 1850. En 1877 con la noción de rango de una matriz propuesta por George Frobenius, se consiguieron explicitar las condiciones de compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales, así como su solución.

Herman Grassmann (1809-1877) introdujo los conceptos de subespacio, generadores, dimensión y suma, así como las fórmulas para los cambios de sistemas de coordenadas.

La construcción de la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales culminó a finales del siglo XIX.

En 1888 Peano definió de forma axiomática una estructura que relacionaba toda la teoría de matrices, determinantes y el estudio de sistemas de ecuaciones, ésta estructura es la de espacio vectorial. Centrado en los espacios vectoriales reales, el matemático alemán Otto Töplitz (1881-1940) generalizó los principales teoremas y resultados de los espacios vectoriales reales sobre los espacios vectoriales generales, dando lugar a lo que hoy se conoce con el nombre de Álgebra lineal.

En los siglos XVIII a XIX el contenido principal del álgebra lineal lo constituían los sistemas de ecuaciones lineales y la teoría de los determinantes, la posición central en el siglo XX fue

ocupada por el concepto de espacio vectorial y las nociones de transformación lineal, bilineal y multilineal.

La versión moderna del Álgebra Lineal es esencialmente una teoría basada en el concepto de espacio vectorial. Esta teoría se enseña habitualmente en su versión axiomática, es decir, presentándola como una estructura. En matemática la idea de estructura surge de una de las corrientes que intentaba fundamentar a la matemática: el Formalismo, cuyo principal impulsor fue David Hilbert. La naturalización de esta presentación puede hacer creer que es un concepto simple. Pero detrás de esta presentación lógica se esconden siglos de constantes desarrollos y difíciles fases de unificación. En recientes estudios (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000) se buscó deconstruir esta aparente sensación de perfección asociada al Álgebra.

En los últimos años, la aplicación del Álgebra se ha incrementado. Al mismo tiempo, las mejoras de *hardware* y de *software* en las ciencias de la computación han elevado el poder de esta disciplina a partir del cual es posible resolver problemas que hace unas décadas parecían imposibles. Sin embargo, a pesar de esta creciente difusión y exigencia en la disciplina, en la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal existen los problemas señalados en la introducción

1.5.3. Las Cónicas y su relación con el Álgebra Lineal

La historia de las cónicas como de cualquier otro objeto matemático tiene relación con la historia en general. La conceptualización geométrica del espacio no se puede entender desde dentro de la matemática solamente, requiere conocer las complejas relaciones entre la matemática y la cultura general (Bartolini Bussi, 2005).

En Otte (1993) se describen cuatro períodos:

- La matemática griega
- El siglo XVII
- El siglo XVIII y XIX
- El siglo XX

El primero corresponde al surgimiento de las cónicas como objeto geométrico. En sus trabajos Apolonio define a las cónicas como la intersección de un plano con distintas inclinaciones y una superficie cónica o cono, de allí el nombre de secciones cónicas. La parábola, por ejemplo, era denominada sección del cono rectángulo.

Durante el primer siglo de la Época Helenística, el período que va del 300 al 200 a.C, hubo tres matemáticos cuyas obras trascienden los tiempos. Estos matemáticos fueron Euclides, Arquímedes y Apolonio, y sus obras son las que han hecho que se denomine a este período como Edad de Oro de la matemática griega.

A pesar de la abundante producción científica de Apolonio de Perga (262-190 a.C) sólo han sobrevivido algunas partes gracias a las traducciones de matemáticos árabes. Uno de los tratados que se ha conservado es *Cónicas*. De esta famosa obra sólo se conserva en el griego original sólo cuatro de los ocho libros. El matemático árabe Thabit ibn Qurra tradujo los tres libros siguientes al árabe antes de que desapareciera sus versiones griegas. En 1710, Edmund Halley, astrónomo amigo de Newton, publicó una traducción al latín de los siete libros y desde entonces se han publicado muchas versiones en lenguas modernas. Las secciones cónicas ya se conocían un siglo y medio antes de que Apolonio escribiera su tratado, pero, así

como los *Elementos* de Euclides eclipsaron a todos los textos elementales anteriores, de la misma forma las *Cónicas* desplazaron a las obras escritas hasta ese momento incluidas las *Cónicas* de Euclides (Bartolini Bussi, 2005).

El segundo período se refiere a la aparición de los debates y las tendencias sobre las que luego serían las características del tratamiento moderno de las cónicas.

El salto de la matemática griega al siglo XVII no se debe a una subestimación de la Edad Media y el Renacimiento, ya que sobre estos períodos se basó el desarrollo de la matemática de los siglos posteriores. Sino a que en el siglo XVII se observan los primeros resultados de un complejo fenómeno social que fue el cambio de la actitud hacia la matemática, la ciencia y la tecnología. La interacción entre comerciantes, científicos, ingenieros, arquitectos, artistas, médicos, humanistas, y todo amplificado por la difusión de las ideas por la imprenta, hace que se considere a las herramientas conceptuales de la matemática para la interpretación y explicación de los distintos problemas y fenómenos que se observaban o surgían. Por ejemplo, la aritmética comercial involucra álgebra, desde las artes, la introducción de puntos en el infinito en la perspectiva, el estudio de la anamorfosis en la pintura y en la tecnología la construcción de dispositivos para trazar curvas para los astrónomos, para los agrimensores. Es en este período en el cual Kepler introduce el término “foco” para definir el foco de la parábola. (Bartolini Bussi, 2005).

La Geometría Analítica comenzó con Descartes (1596-1650) como un apéndice de su método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias (Talavan, 2007, pp. 79-80). Pronto se vio que era un instrumento útil para resolver problemas geométricos.

Podemos leer en la introducción de *Geometría analítica del plano y del espacio* de Medici y Cabrera (1960), un texto que se utilizó en la educación media en Argentina, que Descartes se formó en el seno de una familia económicamente acomodada, tuvo una educación esmerada en el colegio jesuita de La Flèche, se graduó en 1616 en derecho en la Universidad de Poitier. Participó en campañas militares. Fue así como entró en 1618, con veintidós años, al servicio del príncipe Mauricio de Nassau, que combatía al imperio español en las provincias rebeldes de los Países Bajos.

Desde muy joven mostró un notable interés por la matemática. En 1618, durante el acuartelamiento de invierno en Baviera, descubre un método para solucionar problemas de geometría. Aplica este enfoque a un problema planteado por el geómetra griego Pappus de Alejandría (290-350 a.C) y consigue resolverlo sin dificultad (Rashed, 2015). Al enfrentar otros problemas geométricos con esta nueva herramienta observa la potencia y generalidad de su punto de vista. Luego de sucesivas reelaboraciones de este hallazgo decide dar a conocerlos. En 1637 publica en Leyden *La géométrie* como uno de los tres apéndices del Discurso de Método donde presenta cada uno de estos apéndices como ejemplo de aplicación de su método filosófico.

Cierto es que un año antes Pierre de Fermat (1601-1665) comunicaba a su amigo Roverbal, en carta fechada el 22 de setiembre de 1636, trabajos que revelaban que ya poseía un método similar al de Descartes. Pero estos trabajos se publicaron en forma póstuma en 1679. Con lo cual para la ciencia a Descartes le corresponde la prioridad. Además, las ideas de Descartes no provienen del año de publicación sino de aproximadamente de 1619 cuando era mercenario en la campaña del Danubio, en la guerra de los treinta años.

El nombre de Geometría Analítica aparece por primera vez en las obras completas de Newton publicada en 1779, pero como título de un libro de la especialidad la adopta el profesor J.G. Garnier para sus *Eléments de Géométrie Analytique*, libro publicado en Paris en 1808, (Medici, Cabrera, 1960).

Respecto a las secciones cónicas John Wallis, en 1655 publicó un tratado sobre estas curvas, en el que halla sus ecuaciones utilizando el método cartesiano, a partir de sus definiciones como lugares geométricos. Este fue el primer texto en el que fueron consideradas como curvas de segundo grado. Wallis contribuyó a eliminar algunas de las dificultades presentes en los trabajos de Descartes (Ruíz Zúñiga, 2003).

Es posible aproximar la fecha en la que se comenzó el estudio de expresiones matemáticas del tipo:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Estas expresiones se denominan *formas cuadráticas*. Se puede situar alrededor de 1809, (Álvarez Polo, 2013), con los estudios en aritmética de Gauss.

Este tipo de expresiones matemáticas surgen al estudiar rotaciones en los sistemas de coordenadas cartesianos, en donde el problema es reducir una forma cuadrática a una suma de cuadrados. Euler en sus investigaciones del movimiento de rotación de un sólido respecto de un eje de rotación se plantea un problema semejante, es decir, hallar un sistema de referencia que resulte adecuado para describir este movimiento. La resolución de estos problemas implica resolver una ecuación conocida como *ecuación característica* de la forma cuadrática.

Lagrange en 1773 en sus estudios astronómicos respecto a la interacción Tierra-Luna propone una ecuación conocida como ecuación secular (Álvarez Polo, 2013). La resolución de esta ecuación plantea desafíos semejantes a la solución de la ecuación característica.

En la misma línea Cauchy en 1829, en una memoria presentada a la Academia de Ciencias de París, toma el problema algebraico planteado por la ecuación secular y lo independiza de las cuestiones astronómicas que le dieron origen. Muestra como hallar la reducción de formas cuadráticas de orden n , introduciendo el concepto de matriz de los coeficientes de una forma cuadrática, establece algunas propiedades de los autovalores y de los autovectores de una matriz simétrica y demuestra algunos resultados sobre diagonalización de una matriz. Define el concepto de matrices semejantes y prueba que dos matrices semejantes tienen la misma ecuación característica.

En 1827, Jacobi publicó un artículo en el *Journal de Crelle* en el que trata sobre la reducción de una expresión cuadrática general en tres variables del tipo:

$$Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy$$

A otra reducida de la forma: $L \mu\mu + M \beta\beta + N \alpha\alpha$. Realizando un cambio de coordenadas al sistema oblicuo μ, β, α , con igual unidad de medida en ambos sistemas.

Cayley en 1841 publica un artículo sobre transformaciones lineales en el cual presenta los fundamentos de la teoría de los invariantes. Su interés por las transformaciones lineales lo lleva a considerar aquellas que permitan, a través de un cambio de coordenadas rectangular, reducir las formas cuadráticas.

En 1852 Sylvester formula la ley de inercia de las formas cuadráticas, la cual permite diagonalizar una matriz que representa una forma cuadrática.

Las investigaciones de las formas cuadráticas en aritmética realizadas por Gauss y las realizadas por Cauchy, Jacobi, Cayley, Sylvester fueron unificadas por Hermite que hasta ese momento seguían caminos divergentes.

En esta breve síntesis he intentado poner en evidencia algunos de los descubrimientos en el desarrollo del álgebra lineal y a la geometría analítica y como interactuaron ambas

disciplinas, hasta llegar a los conceptos enseñados actualmente en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica.

Capítulo 2: Revisión de la literatura

2.1. Introducción

En este capítulo mencionamos los trabajos que se han realizado en alfabetización académica a nivel internacional, y que pensamos relevantes para nuestra indagación, como aproximaciones al trabajo que pretendemos desarrollar. Estas experiencias están relatadas en el texto de Thaiss et. al. (2012), de los cuales hacemos mención a dos capítulos relacionados con investigaciones a nivel local. Uno de los capítulos es el trabajo de Moyano y el siguiente es el de Micheli. También reseñamos una de las investigaciones realizadas por Pano, Picón Janeiro, Attorresi (2008), la tesis doctoral de Cartolari (2014) y la investigación realizada por Reinozo y Benavides (2011) en Venezuela donde se presenta la preocupación que existe en la comunidad educativa universitaria de ese país respecto a la aplicación de las nociones de la alfabetización académica. Todo lo anterior en lo que respecta a la alfabetización académica en educación superior. Además, nuestra indagación utiliza textos académicos matemáticos con lo cual nos pareció pertinente comentar la tesis doctoral de Acero respecto a los textos de matemática en ingeniería.

2.2. Revisión de la literatura referida a experiencias realizadas con Alfabetización Académica como eje

De las indagaciones realizadas por Carlino (2002a, 2003b, 2009, 2010) surgen las formas de organización de la enseñanza de la escritura, y como enseñando a escribir se enseñaba la disciplina, en Estados Unidos, Canadá y Australia. En esta búsqueda de nuevos caminos de la enseñanza y el aprendizaje se observa que predominan dos líneas de investigación que utilizan dispositivos institucionales y que se ocupaban de acompañar la elaboración y análisis de textos en las disciplinas. Una de estas líneas de investigación es la WAC, con sus iniciales anglosajonas o *Escribir a través del curriculum*, (Bazerman et al., 2005) y la otra es la iniciativa llevada adelante en Australia de *enseñar escritura en contexto* o WID (Chalmers y Fuller, 1996).

En el texto que nos ofrece Thaiss et al. (2012) se informa de los resultados del Proyecto Internacional de Relevamiento de iniciativas sobre escribir a través del curriculum y escribir en las disciplinas. Se señalan las decisiones que profesores, directores de programas, y autoridades universitarias han tomado teniendo en cuenta los modos más apropiados para enseñar a escribir en cada contexto, de conceptualizar la escritura, de gestionar y financiar esta enseñanza.

El texto aporta una perspectiva global a la bibliografía creciente en el tema. Los autores de cada capítulo muestran cómo los docentes en 40 universidades de 28 países de los cinco continentes han afrontado creativamente los problemas cotidianos y de largo alcance que afectan a los estudiantes de distintas carreras y lenguas respecto a su progreso, y a sus aprendizajes disciplinares y comunicativos. En estos capítulos, leemos que docentes e investigadores se apoyan en colegas y en la bibliografía ofrecida por esta corriente para crear iniciativas ajustadas a sus contextos específicos, iniciativas que también pueden servir como modelos regionales y globales. Así por ejemplo leemos sobre iniciativas llevadas adelante en forma personal, como es el caso de las profesoras Micheli e Iglesia (p.35) que se ocupan de la escritura académica en sus clases. Programas institucionales que surgieron por la convicción personal de docentes que lograron apoyo institucional, como podemos leer en el capítulo de

las profesoras Moyano y Natale (p.23). En el texto de Tahiss también encontraremos capítulos en los cuales se muestra la relación dialéctica entre el cambio de concepciones y el cambio de las prácticas de enseñanza. Otros capítulos nos señalan como utilizar la escritura como canal de comunicación, como medio heurístico o epistémico. Toda vez que se plantea la enseñanza de la lectura y la escritura académica surgen preguntas tales ¿Cómo implementar iniciativas que se sostengan a lo largo del tiempo? ¿La enseñanza de la lectura y la escritura debe ser interdisciplinar, capacitando a los docentes de cada asignatura, o debe estar a cargo de especialistas? ¿Se enseña a leer y a escribir en cada disciplina o estas actividades deben ser adquiridas previamente a cursar una asignatura? Estas y otras preguntas reaparecen, las respuestas no dependerán de la voluntad de un docente o de un grupo de docentes. Estas respuestas deben buscarse en forma conjunta entre alumnos, docentes integrados en un equipo y el apoyo de institucional.

En el capítulo dos Moyano y Natale describen (Thaiss et. al., 2012) la experiencia realizada en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), Argentina. Explican cómo funciona el programa: PRODEAC, de alfabetización académica implementado por la Universidad a través del plan de estudios. Su principal objetivo es promover el rendimiento académico de los estudiantes desarrollando su cultura académica en un entorno institucional. Desde la perspectiva teórica seleccionada (lingüística sistémico-funcional), los estudiantes construyen el conocimiento en las disciplinas y les permite participar de actividades sociales, científicas y profesionales. Dos recursos importantes del programa son la "negociación entre iguales", y el apoyo institucional. Resumen algunos resultados como el progreso de los estudiantes en la disciplina y el involucramiento de los profesores, así como el crecimiento del propio programa hacia su estabilidad actual y los nuevos desafíos que enfrenta.

La diferencia entre el programa señalado y nuestra investigación radica en que en la UNGS trabajan dos docentes en el aula, uno conocedor de la disciplina y otro especialista en lingüística, y en nuestra investigación no está previsto la incorporación del especialista en lingüística. Por otra parte, en la UNGS las actividades de alfabetización académica se enmarcan en un programa institucional y nuestra indagación está relacionada con las actividades de investigación de un grupo. No obstante, en ambos casos las actividades de lectura y escritura académica se desarrollan en la asignatura.

En el capítulo tres Micheli e Iglesia (Thaiss, 2012) presentan las dificultades que enfrentan los estudiantes al escribir acerca de la biología celular. Describe el trabajo con las actividades de escritura que se realizan durante las clases y los desafíos que encuentran los profesores comprometidos con el aprendizaje de los estudiantes. Agregan que generar un espacio para la escritura en las clases representa un esfuerzo no sólo para los estudiantes, sino también para los profesores, sobre todo cuando la enseñanza se realiza en cursos con muchos alumnos. Comentan que los resultados que se están obteniendo en cuanto al número de estudiantes que aprueban la cursada son alentadores, y también en cuanto a la calidad de los textos que producen. Señala que el compromiso de los estudiantes para su propio aprendizaje es una prueba de que se está haciendo un esfuerzo que vale la pena. El trabajo relatado en el artículo coincide con nuestro proyecto en cuanto a que los docentes se asumen como investigadores y que no está enmarcado en una política institucional.

Una experiencia que nos interesa comentar es la que realizaron Pano et al. (2008). En el artículo se describen una serie de actividades realizadas con estudiantes de un curso de la asignatura Estadística de la Carrera de Psicología de la Universidad de Buenos Aires. A partir de la intervención docente a favor de la escritura académica, se le solicito a los alumnos que

desarrollaran un escrito en dos fases: un borrador y un texto definitivo. Para este escrito no se previeron efectos acreditativos. Previamente a la intervención los alumnos produjeron un texto escrito. Se observó que la calidad de la escritura de los participantes mejoró. También se indagó a los estudiantes a través de una encuesta acerca de sus actitudes y respecto del papel respecto de la escritura en la universidad. Lo destacable de este estudio es que hubo una correlación lineal y positiva entre la nota final obtenida en la materia y el puntaje obtenido en la medida post-intervención. Aunque los resultados son alentadores, los autores comentan ciertas debilidades metodológicas.

La tesis doctoral de Manuela Cartolari (2014) nos propone recorrer una labor exhaustiva respecto a las teorías que la sustentan y los antecedentes internacionales y locales de la Alfabetización Académica en el nivel superior. En cuanto a los antecedentes locales, extrae y presenta los conceptos claves de una serie de experiencias, cuyas descripciones aparecen en artículos y ponencias que el Grupo para la Inclusión y Calidad Educativas a través de Ocuparnos de la Lectura y la Escritura en todas las Materias (GICEOLEM), del cual la autora es parte, han presentado en congresos internacionales a lo largo de estos últimos cinco años y que se pueden consultar en <https://sites.google.com/site/giceolem2010/>. Respecto a los aportes teóricos de la enseñanza y el aprendizaje muestra una síntesis de la corriente constructivista, en especial la Epistemología Genética de Piaget y la Teoría Sociohistórica de Vygotsky.

Dado que en nuestra investigación indagamos sobre el valor epistémico de la lectura y escritura académica en el aprendizaje de conceptos matemáticos, nos parece pertinente observar los modos de abordar y concebir la lectura y escritura en el ámbito de la formación de futuros docentes, que es donde la autora realiza su investigación.

Hace hincapié en que los modos de organizar, de inferir, de interpretar, de leer y escribir en una disciplina no surgen naturalmente de actividades de alfabetización académica. Es necesario hacer observable estos procedimientos cognitivos de construcción de significados, es decir, proponer al alumno actividades que permitan tomar conciencia sobre el texto que están produciendo, con el andamiaje de sus pares y del docente.

La autora se propone describir y conceptualizar los usos y sentidos de la lectura y escritura en distintas asignaturas disciplinares de la formación inicial de docentes de Historia. Específicamente en un Instituto de Formación Docente de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Los resultados de esta investigación indican, en primer lugar, que los modos de leer y de escribir en las asignaturas observadas se hallan entramados a los supuestos ontológicos y epistemológicos respecto a qué es la Historia y qué significa conocer y pensar en esta disciplina.

En segundo término, los resultados señalan que los futuros docentes también necesitan apropiarse de ciertas formas legitimadas y características de construir significado y producir textos en la comunidad discursiva de referencia.

Cartolari presenta dos modos de interacción, o situaciones de enseñanza y de aprendizaje, en el aula que define como:

- Situación *dialogica-interpretativa*: en la cual el uso reflexivo y recursivo de los contenidos a partir de la voz de los textos, la propia interpretación de los estudiantes y la del profesor adquieren un sentido disciplinar. El dialogo sobre lo leído y lo escrito permite conectar a los alumnos sobre los requerimientos de los profesores con aspectos epistemológicos y ontológicos característicos de la disciplina en la que se forman.

- Situación *monológica-transmisiva*: en la cual la lectura y escritura son *registros recodificados de la voz del docente*. Es decir, en las clases en las que predomina la exposición transmisiva y monológica del profesor, los alumnos tratan de identificar que partes de los textos refrendan el discurso del docente. Luego en las evaluaciones escritas buscan glosar con sus propias palabras aquello que el profesor dice sobre los textos e infieren que quiere que escriban a los fines de conformar sus expectativas y aprobar los exámenes.

La autora nos señala que, desde el punto de vista de los docentes, tanto los que promueven una enseñanza dialógica-interpretativa como aquellos en que sus clases predomina la enseñanza monológica-transmisiva están de acuerdo en que la lectura y la escritura se relaciona con un sentido disciplinar, pero aquellos que promueven la dialogidad en sus clases son los que afirman que es preciso ayudar a los ingresantes a familiarizarse con las formas de leer y escribir en la disciplina que enseñan.

Este estudio puede ser un insumo para reflexionar sobre las interacciones entre profesores y alumnos, y como favorecen o desalientan el aprendizaje en la disciplina.

En el estudio documental realizado por Reinozo y Benavidez (2011) las autoras nos presentan la preocupación creciente que existe en los docentes de las carreras de ingeniería de Venezuela en cuanto a que no se le da suficiente importancia a la lectura comprensiva, ni se aprovecha como herramienta para fomentar el análisis crítico.

El estudio se realiza sobre los planes de estudio de algunas universidades de aquel país, y de acuerdo a lo que observan los investigadores en los resultados, en los planes de estudio existen materias humanísticas, pero se desatienden cuestiones de la alfabetización académica. Traemos este estudio a la vista para dar cuenta de que el camino de alfabetización académica es una línea que está en el interés de los colegas, en cuanto a sus posibilidades educativas respecto al aprendizaje y la enseñanza en las disciplinas técnicas.

2.3. Los textos de Matemática. Un análisis estructural.

Los alumnos que participan de nuestra investigación parten de la lectura de un texto académico. Acero (2013), nos ayuda a conocer desde que perspectiva analizar el texto elegido y situarlo en las coordenadas educativas que le corresponden en función de la estructura que éste posee, de la concepción de enseñanza y de aprendizaje que tienen los autores, de la concepción de la matemática que se extrae de su lectura y otras categorías definidas por el autor.

Por esto pensamos que comentar esta tesis doctoral nos permitirá hacernos de un saber necesario sobre este insumo.

En el comienzo el autor nos presenta las serias dificultades que tienen los alumnos al momento de seguir la lectura de un texto técnico, y nos señala las contradicciones de los distintas corrientes de enseñanza que consideran al texto. Desde la postura en la que los textos son anagramas que el alumno no puede traducir. Reforzando, así, una comprensión instrumental de la matemática. Además, la mayoría de los textos están dirigidos a satisfacer las necesidades de los profesores con lo cual el autor nos muestra que el texto para el alumno es casi inútil, dado que no está dirigido a él.

Hasta la postura contraria que considera al texto como fundamental en la adquisición de conocimientos, como una exposición estructurada de un cuerpo de conocimientos, como guía en la enseñanza.

Si bien las dos posiciones anteriores no son lógicamente excluyentes, conducirían a una imposibilidad que se contradice con la realidad misma. No se puede aceptar que los libros de texto de nivel universitario sean un objeto a la vez necesario e ilegible, sin admitir también la imposibilidad de la enseñanza de la matemática misma. Si el libro de texto queda fuera del alcance del estudiante, y ese recurso es a la vez necesario para su formación, la posibilidad misma de esa formación queda comprometida.

La investigación desarrollada por Acero construye y analiza dimensiones no explícitas en los textos, poniendo en la superficie su naturaleza y estructura. Contribuye a la comprensión del tipo de abstracción y complejidad que distancia al texto de un potencial lector.

Entre los dos extremos, (1) *el libro de texto como objeto imprescindible para el aprendizaje universitario*, (2) *el libro como objeto ilegible para el estudiante universitario*, los resultados de la tesis prueban que los libros de texto alcanzarán con más facilidad a sus destinatarios naturales si un experto organiza el material en bibliografías que, además de presentar una selección de libros, vuelva visibles los criterios que han decidido esa selección, los propósitos de su lectura, las características relevantes de cada libro y las competencias lectoras que suponen.

Capítulo 3: Metodología

3.1. Introducción

De acuerdo con Samaja (2005) diseño de la investigación nos remite a la manera particular en que tomamos las decisiones sobre el tipo de objeto modelo. El modelo es el mediador entre los saberes previos y los objetos investigados. La modelización podemos caracterizarla como la construcción de ese intermediario. Una vez decidida esa construcción comenzaremos a describir sistemáticamente nuestro objeto de investigación. Descripción que seguirá estrategias metodológicas, modos de lectura de los datos y la manera de extraer pruebas que justifiquen la hipótesis de investigación o la falseen. Es posible pensar el diseño como una secuencia de estados o tareas a lo largo de un estudio. Sintetizando aún más se puede decir que es un plan o protocolo para llevar adelante algún estudio.

Nuestra investigación respecto a la variable Alfabetización Académica y su posible influencia sobre la mejora del aprendizaje del álgebra lineal y la geometría analítica, fue desagregada en tres subvariables o dimensiones: la Comprensión Lectora Académica, la Escritura Académica y la evaluación del rendimiento académico de los alumnos frente a la resolución de un problema. Los resultados obtenidos se plasmaron en una serie de trabajos. En la preparación de la investigación surgieron estudios complementarios sobre el material a utilizar que enriquecieron nuestra búsqueda. Estos se muestran en los trabajos cuatro, cinco y seis.

3.2. La investigación-acción como marco general de nuestro trabajo

Como paradigma de investigación social pretende salvar ese abismo entre la investigación académica y las prácticas sociales. Son las personas inmersas en su realidad quienes pueden hallar soluciones. Esta corriente plantea que las personas desempeñen un rol activo en la mejora de su existencia.

Frente a la complejidad social creciente, surgen a principios del siglo XX, dos enfoques para explicar, interpretar, comprender los nuevos fenómenos a los que se enfrentaba la sociedad. El primero calificado como positivismo, que seguía el modelo de las ciencias empíricas, que buscaba el mecanismo que explicara cómo se comportaría la sociedad. Para esta corriente la sociedad tenía un fundamento racional sobre el cual era posible planificarla, a través de políticas centralizadas de gobierno. Estas políticas estaban justificadas por pruebas científicas del progreso en la mejora de las condiciones de vida. El segundo paradigma, el paradigma interpretativo, rechazaba la búsqueda de fundamentos racionales como base para el control democrático de las condiciones sociales. Se focalizaba en la importancia de comprender la sociedad desde dentro.

En 1947 Kurt Lewin (McKernan, 2008) propone el concepto de investigación-acción, con el cual se intenta hacer comprensible los problemas y situaciones diarias que exigen soluciones inmediatas de los profesionales en ejercicio para mejorar la efectividad de su práctica. Se utilizado en entornos educativos, comunitarios, sanitarios, industriales. Propone hallar los materiales para el desarrollo del pensamiento crítico de las personas en situaciones problemáticas.

Una de las definiciones de investigación-acción es la que proponen Carr y Kemmis (1986, p. 162) en donde postulan que

La investigación-acción es simplemente una forma de estudio autoreflexivo emprendido por los participantes en situaciones sociales para mejorar la racionalidad y la justicia de sus propias prácticas, su comprensión de estas prácticas y las situaciones que se llevan a cabo.

Steanhouse (1991) plantea el concepto de profesor-investigador comprometiendo a los docentes como agentes activos en la generación de hipótesis. A través de esta propuesta se combina el desarrollo del curriculum con el desarrollo profesional del profesor en investigación. De acuerdo con Steanhouse dominar el campo de investigación-acción cambiará la imagen que el profesor tiene de sí mismo y de sus condiciones de trabajo. Plantea que cada aula sea un laboratorio y el docente un miembro de la comunidad científica, en donde las propuestas de cambio en el curriculum o las hipótesis sean sometidas a comprobación a través de la prueba de la práctica. Admitiendo que el curriculum es una propuesta o hipótesis educativa que invita a una respuesta crítica de quienes lo ponen en práctica, un diseño de investigación basado en estas ideas es un medio para estudiar los problemas en la enseñanza y el aprendizaje. Toda investigación y todo desarrollo bien fundamentado del curriculum, ya sea de un profesor o una institución, se apoya en el trabajo de los profesores. En esta línea McKernan (2008, p. 25) propone una definición:

La investigación-acción es el proceso de reflexión por el cual en un área-problema determinada, donde se desea mejorar la práctica o la comprensión personal, el profesional en ejercicio lleva a cabo un estudio –en primer lugar, para definir con claridad el problema; en segundo lugar, para especificar un plan de acción- que incluye el examen de hipótesis por la aplicación de la acción al problema. Luego se emprende una evaluación para comprobar y establecer la efectividad de la acción tomada. Por último, los participantes reflexionan, explican los progresos y comunican los resultados a la comunidad de investigadores de la acción. La investigación-acción es un estudio científico reflexivo de los profesionales para mejorar la práctica. (McKernan, 2008, p. 25)

Para resolver el problema de la mejora del aprendizaje del álgebra lineal y la geometría analítica me involucro como investigador en las actividades de alfabetización académica, diseñándolas y guiándolas, siendo además el docente del curso donde se desarrolló la experiencia. Es decir, las dos condiciones mínimas: un problema y un investigador involucrado, exigidas por este tipo de investigación están dadas. Por esto considero que este marco es adecuado.

3.3. Respecto a los tipos de hipótesis

En esta tesis utilizamos varios tipos de hipótesis, con lo cual consideramos necesario hacer una breve revisión de este tema.

Formular una hipótesis es dar una respuesta a un problema o explicar algún fenómeno en forma provisoria. Está formulada como una proposición cuya validez ha de ser probada.

Ibáñez Brambila (1995) propone el concepto de hipótesis metodológica. Esta puede ser hipótesis de investigación o de trabajo. Las de investigación surgen de la revisión bibliográfica, como respuesta al problema y apoyan conceptualmente al investigador. Las de

trabajo derivan de las de investigación, pero en su enunciado se formula una afirmación operacional respecto a la relación entre las variables.

Por otro lado, Hernandez Sampieri, R., Fernandez Collado, C., Baptista Lucio, P. (2006) las clasifican como: de investigación, nulas, alternativas y estadísticas. Las de investigación son las hipótesis que “se definen como proposiciones tentativas acerca de las posibles relaciones entre dos o más variables” (Hernandez Sampieri, et al, 2006, p. 127). Las enunciaciones de las proposiciones de las hipótesis nulas son aquellas cuya formulación es la negación de las proposiciones utilizadas en las hipótesis de investigación.

Cuando es posible hacer una traducción de la hipótesis de investigación en términos estadísticos, estaremos hablando de una hipótesis estadística. Esta puede ser de estimación, de correlación, de diferencia de medias.

En el caso de la hipótesis de estimación se puede pronosticar que la variable, o alguna característica de la variable, tomará, o se aproximará a un valor estimado por algún parámetro estadístico: promedio, porcentaje, mediana, moda.

En el caso de las de correlación el objetivo es cuantificar la relación entre dos variables por medio del parámetro estadístico de correlación.

En la hipótesis de diferencia de medias se compara un parámetro estadístico entre dos o más grupos.

Batanero (2001) plantea los diferentes niveles de hipótesis de una investigación. La autora señala que existen hipótesis sustantivas, de investigación, experimental, hipótesis estadística alternativa e hipótesis nula.

La hipótesis sustantiva es una explicación teórica de un fenómeno. Con frecuencia esa explicación es un fenómeno no tangible, inobservable, por lo que no es posible investigarla directamente. Con lo cual deberemos derivar implicaciones observables, es decir, que a través de un determinado proceso de categorización se convierta en una variable susceptible de ser estudiada. La hipótesis de investigación es una implicación de la sustantiva. Debido a que la hipótesis de investigación, en general, es poco específica para dirigir una investigación experimental es necesario definir una variable dependiente precisa que surja de una tarea experimental. Con esta base podemos construir una hipótesis experimental.

Una implicación de la hipótesis experimental se utilizará para hacer el análisis estadístico. Esta implicación es la hipótesis estadística alternativa. El complemento lógico de la hipótesis alternativa es la hipótesis nula.

3.4. La Teoría de las Matrices de Datos

Acordamos con Samaja en que “Antes de ponerse a investigar todo científico presupone que su objeto es investigable” (Samaja, 2005, p. 147), es decir, entre las posibilidades de conocimiento del sujeto y las condiciones de posibilidad del objeto, debe mediar la significación que se da en la relación entre sujeto y el objeto. El paso fundamental para la construcción del objeto es mediante la construcción del dato, es decir, el tránsito del orden práctico al orden teórico. Esas operaciones que Samaja (2005) denomina *aprioris de inteligibilidad* son:

1. Entificar (proponer entes de observación)
2. Categorizar I (elegir criterios de clasificación)
3. Categorizar II (determinar las clases o categorías)
4. Operacionalizar (construir y asignar indicadores)

De acuerdo con las operaciones anteriores la construcción de las matrices de datos sigue el siguiente orden:

1. Elección de las unidades de análisis
2. Selección de las variables
3. Identificación de los valores posibles de las variables
4. Elección de los indicadores con que se medirán

La modelización se puede caracterizar como la construcción de ese intermediario, a partir del protagonismo del investigador, entre la teoría y la realidad captada desde la práctica. Se puede describir como el proceso por el cual se especifican los procedimientos o acuerdos por los cuales se redefinirán los hechos para transformarlos en datos asimilables por la teoría propuesta. La modelización recorre esos saberes previos, las analogías y de allí a las formalizaciones teóricas y a los controles falsacionistas. Con lo cual el dato es algo que se construye a partir del marco teórico dentro del cual se desarrolla la investigación. En su primera tesis, Samaja (2005), señala que un dato es más que una información; es una construcción compleja y tiene una estructura cuatripartita, que permite la transducción entre la descripción y la tautología. Es decir, ése ida y vuelta entre el momento empírico-descriptivo y el momento teórico-tautológico. Las cuatro componentes son: la unidad de análisis, variables, valores y los indicadores.

Unidad de análisis [UA]: como señalábamos anteriormente para impulsar una investigación con base empírica se requiere algún material sobre el cual trabajar, este material lo constituyen las unidades de análisis. Son entidades identificables en el espacio y/o tiempo y son numerables o computables, es decir, se puede informar el número de unidades con el que se trabajó (Samaja, 2005).

Variable [V]: son los atributos, propiedades o características potencialmente derivables de las unidades de análisis. El concepto de variable alude a un campo de variaciones o a un sistema de clasificación. El campo de variaciones indica los estados posibles que puede asumir la unidad de análisis.

Valor [R]: cada una de las clases definidas en la variable o en el sistema de clasificación constituye un valor de esa variable. (Ynoub, 2015).

Indicador [I]: este componente del dato tiene una estructura que relaciona dos elementos: su dimensión y un procedimiento (Samaja, 2005). La dimensión es aquello que refiere a la expresión empírica de la variable. El procedimiento son las operaciones o acciones aplicados a ciertas dimensiones relevantes de las variables para obtener la información que puede ofrecer el indicador. Samaja señala que no existen dimensiones observables, sino dimensiones inobservables a las cuales los procedimientos las hacen observables. Es decir, el indicador entrega la información que permite inferir el valor de una variable en una unidad de análisis.

Hallar un indicador válido implica que ese indicador coincida con lo que busca medir esa variable. Esta información puede ser un indicio perceptivo, escucha de una respuesta, lectura de un instrumento de medición (amperímetro, decibelímetro, etc.), la ubicación de un sujeto en una escala o diversos tipos de índices.

El indicador queda definido por tres criterios:

- La especificidad: detecta una sola dimensión
- La sensibilidad: detecta mínimas cantidades
- El costo: accesible a los costos de la investigación

De forma que la confiabilidad del dato queda subordinada al procedimiento.

De acuerdo con la segunda tesis planteada por Samaja (2005) cualquier investigación tendrá como mínimo tres matrices de datos:

1. Matriz de datos del nivel focal (nivel N)
2. Matriz de los componentes de la unidad de análisis (nivel N₋₁)
3. Matriz de los contextos de la unidad de análisis (nivel N₊₁)

En nuestro caso consideramos como matriz de datos del nivel de anclaje o nivel focal, a los alumnos de un curso de ingeniería. Como matriz supraunitaria o matriz constituida por el contexto, es decir, todos los cursos de Álgebra y Geometría Analítica (AGA) de la Facultad Regional Buenos Aires (FRBA) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), del cual el curso K1022 es uno de ellos. La matriz subunitaria, o matriz constituida por las componentes de la unidad de análisis, a la Comprensión Lectora Académica, a la Escritura Académica y al Rendimiento Académico. El sistema de matrices lo indicamos en la Tabla 1.

Tabla 1. Matrices de contexto, de Datos, de Componentes.

Cursos de Álgebra y Geometría Analítica de la FRBA (N + 1)		
	Alumnos del Curso K1022 de AGA (N)	
		Comprensión Lectora Académica Escritura Académica Rendimiento Académico (N – 1)

La Tabla 2 ilustra las relaciones jerárquicas que presenta nuestro sistema de matrices de datos.

Tabla 2. Relaciones jerárquicas que presenta nuestro sistema de matrices

		[R]	[V]	[UA]	
		Distintas variables posibles de analizar en los alumnos de los distintos cursos de AGA	Cursos de AGA	FRBA	Nivel N ₋₁ Supraunitario
	[R]	[V]	[UA]		
	Cuestionario Comprensión Lectora Académica Aspectos de la Escritura Académica Evaluación del rendimiento de los alumnos frente a la resolución de un problema	Comprensión Lectora Académica Escritura Académica Rendimiento Académico	Alumnos de un Curso de AGA		Nivel Focal
[R]	[V]	[UA]			
		Cuestionario Comprensión Lectora Académica Aspectos de la Escritura Académica Evaluación del rendimiento de los alumnos frente a la resolución de un problema			Nivel N ₋₁ Subunitario

Las actividades elaboradas e implementadas, fueron relatadas en seis trabajos. A continuación, describimos el marco metodológico de cada trabajo. Lo específico lo presentamos en los propios trabajos.

Estos trabajos fueron desarrollados a lo largo de un proyecto (Pano et al. 2013). La metodología implícita en cada uno de ellos surge de una reflexión teórica sobre los mismos que presento a continuación. Para este análisis me apoyo principalmente en la clasificación que desarrolla Ynoub (2007). La autora señala que los tipos de investigación y los distintos diseños relacionados con cada uno indica que los estudios pueden ser:

- investigaciones descriptivas: simples, taxonómicas, correlacionadas que no implican causalidad.
- investigaciones explicativas: experimentales, correlacionadas causales
- investigaciones interpretativas: sin participación de los investigadores o con participación de los investigadores.

Los distintos diseños quedan determinados por:

- el número de variables: univariados, bivariados, multivariados
- el número de unidades de análisis: de un caso, de muestras pequeñas, de muestras grandes, de una población y de varias poblaciones.
- El número de mediciones u observaciones que se hacen a lo largo del tiempo: transversales, longitudinales.

3.5. Análisis metodológico de los trabajos

En esta sección presento los artículos desarrollados a partir de las experiencias realizadas. Los trabajos son del 1 al 6. En el caso de los trabajos 1, 2 y 3 fueron publicados previo referato. El trabajo 4 fue aceptado para su publicación. El trabajo 5 fue enviado para su publicación y está en evaluación. El trabajo 6 es inédito.

Trabajo 1: Análisis de una actividad de comprensión lectora sobre un texto de álgebra con alumnos de la carrera de ingeniería.¹

Trabajo 2: La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica.²

Trabajo 3: La comparación del desempeño de dos grupos de estudiantes en la resolución de un problema para evaluar una actividad de alfabetización académica.³

¹ Messina, V., Cittadini, G., Pustilnik, I., Sara, A. y Pano, C. (2016). Análisis de una actividad de comprensión lectora sobre un texto de álgebra con alumnos de la carrera de ingeniería. *Revista Premisa* (ISSN 1668-2904), de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM), n°71, pp. 34-69. <http://www.soarem.org.ar/>

² Messina, V., Cittadini, G. y Pano, C. (2017). La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica. *Revista Perspectivas Metodológicas* (ISSN: 1666-3055), N° 19, Vol. II, pp. 135-149. Departamento de Humanidades y Arte de la Universidad Nacional de Lanús.

³ Messina, V., Gil, T. y Pano, C. (2017). La comparación del desempeño de dos grupos de estudiantes en la resolución de un problema para evaluar una actividad de alfabetización académica. *Actas del XX Encuentro Nacional y XII Internacional Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero, 17, 18 y 19 de mayo de 2017. http://emci2017.unse.edu.ar/?page_id=29

Trabajo 4: Las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje que subyacen en un capítulo sobre secciones cónicas.⁴

Trabajo 5: Uso didáctico del error: una experiencia de aula.⁵

Trabajo 6: Palabras cónicas⁶

3.5.1. Trabajo 1: Análisis de una actividad de comprensión lectora, sobre un texto de álgebra con alumnos de la carrera de ingeniería.

El objetivo del estudio es conocer el estado de Comprensión Lectora Académica de los alumnos de un curso de ingeniería. Esta indagación se desarrolló en el marco de la investigación-acción dado que la experiencia fue realizada en el curso en el que me desempeñaba.

Es un estudio *descriptivo y transversal*, de acuerdo con Hernández, Fernandez, Baptista (2006), porque se utiliza para describir situaciones o eventos, no busca probar hipótesis ni hacer predicciones. Se presenta la información descriptiva sintetizada a través de gráficos y resúmenes de información cuantitativa. Describe sistemáticamente los hechos, características o el comportamiento de una muestra o población, en una única observación.

En este estudio se analizó una variable, la Comprensión Lectora Académica, por lo que se puede considerar *univariado*. Esta variable fue observada sobre todos los alumnos de un curso. Observación en el sentido planteado por Ynoub cuando afirma “*tornar observable* aquello a lo que remite la variable y, consecuentemente, a la manera de *captar* eso observable” (Ynoub, 2015, p. 249). El conjunto de estos alumnos fue población y muestra a la vez. Esto permite decir que la muestra es *extensiva o poblacional* como indica Ynoub (2007) e *incidental* en el sentido que le otorga Colás Bravo y Buendía Eisman (1994).

De modo que las unidades de análisis fueron los alumnos del curso, la variable es la Comprensión Lectora Académica de cada uno, el instrumento con el cual se recogieron los datos fue un cuestionario. Sobre los datos obtenidos se aplicó un diseño de evaluación específico indicado en el trabajo. Los resultados de la evaluación de las respuestas de cada alumno es el indicador del estado de Comprensión Lectora. En la Tabla 3 se indica el sistema de matrices de datos del Trabajo 1.

⁴Messina, V., Revelli, M., Pustilnik, I. y Pano, C. (en prensa). Las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje que subyacen en un capítulo sobre secciones cónicas. *Revista Premisa* (ISSN 1668-2904), de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM). Aceptado para su publicación el 12 de noviembre de 2017.

⁵ Messina, V., Seminara, S. Gil, T. y Pano, C. (2017). Uso didáctico del error: una experiencia de aula. *Revista de Educación Matemática* de la FAMAF- Universidad Nacional de Córdoba. Enviado el 8 de noviembre de 2017 para su publicación.

⁶ Messina, V., Torre, V. Pano, C. (2017). *Palabras cónicas*. Manuscrito no publicado, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.

Tabla 3. Sistema de matrices de datos del trabajo 1

Alumnos Curso K1022 (N + 1)		
	Comprensión Lectora Académica (N)	
		Cuestionario (N – 1)

	Dimensiones del Indicador	Procedimiento
Indicador: Análisis de los datos obtenidos del cuestionario	Ocho preguntas Cada pregunta tiene la opción: Correcto Próximo correcto Próximo incorrecto Incorrecto	Evaluación pluripersonal de cada cuestionario

3.5.1.1. Instrumento de recogida de datos: los instrumentos en investigación científica son dispositivos para captar, recolectar, producir información necesaria para la investigación. En toda indagación es importante definir el tipo de instrumento utilizado para recabar datos. Señalando si es de un tipo ya construido y probado, o si es un diseño específico para la investigación desarrollada. (Ynoub, 2015).

3.5.1.2. Cuestionario: este instrumento es un conjunto de preguntas preparadas cuidadosamente para obtener información sobre hechos o aspectos relevantes en una investigación. Las respuestas serán obtenidas de la población, o su muestra, acorde al perfil con lo que busca conocer. La información se obtendrá del conjunto de ítems contenidos en el instrumento. Se deberá considerar la organización del cuestionario y su aplicación, es decir, presentación, contenidos, visualización, formulación de consignas, pautas de presentación, modo en que será aplicado: en persona, por teléfono, virtualmente, etc. El contenido de las preguntas de un cuestionario puede ser muy variado, pero, básicamente pueden ser de preguntas cerradas o abiertas. En las preguntas cerradas las posibilidades de respuesta son delimitadas por eso a veces se las denomina precodificadas, si se le asigna un código a cada uno de los posibles valores. Pueden ser dicotómicas o tener varias alternativas de respuesta donde sólo una es válida o tener la posibilidad de elegir más de una opción de respuesta como válida. Para formular preguntas cerradas es necesario considerar las posibles respuestas.

Las preguntas abiertas se utilizan cuando no tenemos información suficiente sobre las posibles respuestas. En este caso se buscan captar las propias palabras de los encuestados para luego codificarlas. A diferencia de las preguntas cerradas donde la codificación es previa. En un cuestionario pueden combinarse preguntas abiertas o cerradas. La elección del tipo de preguntas depende del tamaño de la muestra, del grado de anticipación de las posibles respuestas, de los tiempos de que se disponga para codificarlas y del tipo de codificación diseñada o utilizada.

Para administrar el cuestionario se deben fijar las consignas de presentación del encuestador y los fines de su trabajo. Garantizando la libertad de otorgar o negar el consentimiento del encuestado a dicho interrogatorio. Respecto a la modalidad de aplicación del cuestionario, estos pueden ser: (1) aplicado por el encuestador o (2) autoadministrado. Para el caso (1) estos pueden ser: (a) en presencia, (b) telefónica, (c) medio virtual. Para el caso (2) pueden ser: (a) en presencia, (b) en ausencia.

3.5.1.3. El cuestionario diseñado para nuestro estudio

Fue realizado a partir de un texto dirigido a estudiantes que comienzan su carrera universitaria. Posee una introducción a modo de presentación, se señalan pautas de lectura y de escritura. Consta de ocho preguntas. Las preguntas 1 a 4 son abiertas y las preguntas 5 a 8 son cerradas (ver anexo 1, p. 112). Fue aplicado a través del aula virtual, el estudiante pudo interactuar con sus pares y con los docentes del curso presencial a través de este medio virtual, tuvieron dos semanas para contestarlo. Para la escritura de las respuestas se les pidió que estas fueran presentadas en forma digital, para lo cual debieron utilizar un procesador de texto y un editor de ecuaciones, ambos conocidos por ellos. La entrega de las respuestas desarrolladas por los alumnos y la devolución de los resultados fue a través del aula virtual.

3.5.1.3.1. Asignación de valores del indicador

Para conocer el estado de Comprensión Lectora de cada uno de los alumnos seguimos la siguiente metodología:

Cada pregunta del cuestionario tiene una respuesta modelo, que fue consensuada por el grupo de docentes que integra el equipo de investigación.

Construimos una escala para clasificar las respuestas de acuerdo al grado de afinidad o semejanza con la respuesta modelo.

La evaluación fue pluripersonal y los valores se obtuvieron por acuerdo entre los evaluadores.

Cada respuesta estará en alguna de las siguientes clases, y a cada clase le asignamos un número:

Respuesta correcta (valor asignado 4): será considerada correcta toda respuesta que guarde relación de semejanza con el modelo.

Respuesta próxima a la correcta (3): es una respuesta con más partes afines al modelo que partes contrarias al mismo.

Respuesta próxima a la incorrecta (2): respuesta con menos partes afines al modelo que partes contrarias al mismo.

Respuesta incorrecta (1): toda y en todas sus partes, contraria al modelo.

Respuesta en blanco (0): no respondida.

De modo que las puntuaciones obtenidas por los alumnos en cada trabajo fluctuaron entre 0 y 32. Como se indica en el Trabajo 1, pp. 54-55.

En el Anexo: Trabajo 1 (pp. 110-124) se presenta el cuestionario, la respuesta modelo y cuatro ejemplos de evaluación de la producción de los alumnos.

3.5.1.4. Presentación de resultados

Se obtuvieron resultados sobre la Comprensión Lectora Académica de los alumnos y se evaluó el cuestionario utilizando dos índices, el índice de dificultad y el de discriminación de las preguntas. Los resultados de estos índices lo muestran como un buen instrumento para registrar los valores sobre la variable Comprensión Lectora Académica de los alumnos con respecto al texto seleccionado.

Los resultados obtenidos por los alumnos se presentan en un diagrama de barras en el que se puede apreciar la distribución de frecuencias de las puntuaciones. Tanto los resultados mostrados por diagrama de barras como la evaluación del cuestionario se pueden examinar en el artículo de Messina, Cittadini, Pustilnik, Sara, Pano, (2016, p. 46).

3.5.1.5. La muestra

En nuestro estudio nos interesa hacer observables patrones o comportamientos regulares del objeto que se investiga. La muestra, como señala Ynoub, es la que “mediante ella y a través de ella habremos de pesquisar o identificar dichos rasgos regulares, necesarios o característicos del objeto investigado” (Ynoub, 2015).

En algunas investigaciones es posible conocer un rasgo de interés de todos los sujetos de un conjunto. En esta situación se dice que se ha realizado una investigación sobre la población o el universo. Cuando no es posible acceder a toda la población, por distintas razones, se selecciona una parte de esa población, en este caso estaremos trabajando con una muestra, de la cual han de inferirse los resultados. Para que esto sea posible la muestra deberá ser representativa. Es decir, que puede dar cuenta de toda la diversidad existente en el universo.

De acuerdo con Samaja “Decir que una muestra es representativa, es lo mismo que decir que tenemos fundamento suficiente para pensar que la estructura de la muestra es análoga a la estructura del universo” (Samaja, 2005, p. 273).

Si se extrae una parte del universo de modo aleatorio se considera que la muestra es representativa, las características y rasgos de los casos seleccionados se distribuirán de modo análogo en el universo.

Suponer que existe una analogía entre muestra y universo se justifica por dos criterios.

- Criterios sustanciales
- Criterios formales

Los aspectos sustanciales están basados en lo que sabemos del objeto de estudio, más específicamente en la variabilidad relevante para los fines de la investigación. Es en este punto donde la experiencia del investigador es fundamental, además de la revisión bibliográfica inicial, que rastrea conclusiones teóricas y hallazgos empíricos que provean elementos de juicio para determinar el tipo de muestra.

Cuanto más conocemos del universo, respecto de las variables más relevantes para nuestro estudio, más elementos de juicio tendremos para estimar analogías entre muestra y universo.

Los aspectos formales están basados en la teoría de probabilidades, nos ofrecen elementos de juicio para establecer la probabilidad de que una muestra sea representativa. Estos criterios están relacionados con la forma de recoger y seleccionar los casos de acuerdo al conocimiento que se tenga del objeto de estudio.

De lo dicho se desprende que la muestra puede ser probabilística (aleatoria), o no probabilística (finalística o intencionadas), como las muestras incidentales o casuales.

En el caso de las probabilísticas, estas pueden ser: muestreo aleatorio simple, estratificadas aleatorias, al azar sistemático, por conglomerado.

Las no probabilísticas pueden ser: muestra de caso único o de pocos casos, muestras de casos extremos y casos desviados, muestras por cuotas.

Las muestras incidentales son muestras no probabilísticas, como por ejemplo las obtenidas en cadena o de bola de nieve, participación voluntaria. (Ynoub, 2015)

Las muestras se deben considerar de acuerdo al tipo de investigación que se desarrollará, en este sentido, y sin pretensión de ser exhaustivos, estas pueden ser:

- Muestras en investigaciones exploratorias destinadas a producir nuevas ideas.
- Muestras en investigaciones descriptivas buscan establecer las características generales de una población a partir de lo hallado en la muestra.
- Muestras en investigaciones experimentales o cuasiexperimentales con las que se busca verificar hipótesis causales.

La muestra de las investigaciones exploratorias se aconseja que sean finalísticas, es decir, que los sujetos de la muestra se seleccionen de acuerdo al criterio del investigador según ciertas características relevantes, por ejemplo, toda la variedad de sujetos posibles, sólo los que tengan las características opuestas, el grupo que presenta el atributo con mayor frecuencia. De acuerdo con Galtung (1966) los nombres de estas muestras son: muestra heterogénea, de casos extremos, de casos desviados.

Con la muestra (en este caso aleatoria) de una investigación descriptiva el investigador indaga en un universo determinado y le es posible conocer la distribución de parámetros estadísticos hallados en la muestra y extrapolarlos al universo en estudio si la muestra es representativa. En este caso el investigador debe esperar que el fenómeno ocurra en el entorno natural de los sujetos.

En los diseños experimentales las muestras son probabilísticas y pueden ser usadas para argumentar a favor de una hipótesis, para obtener datos que la fundamenten, para rechazar hipótesis, para replicar experimentos, también como argumento para abrirle paso a una nueva idea o tecnología.

3.5.2. Trabajo 2: La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica.

Mi participación en la experiencia hace que la investigación-acción resulte un marco adecuado. De acuerdo con Ynoub (2007), este trabajo es *explicativo*, dado que se busca determinar dependencia entre las variables. En este caso interesa probar si una variable es causa explicativa del comportamiento de la otra variable.

Es un estudio con aspecto longitudinal. La sucesión de los trabajos prácticos se tomó como indicador de la variable temporal. Para cada alumno se calculó la correlación lineal entre esta variable y la nota obtenida en cada trabajo práctico. Los alumnos resolvieron estos trabajos prácticos de manera sucesiva y los presentaron, en tiempo forma, a lo largo de un cuatrimestre.

Se correlacionó, para cada alumno de la muestra, la variable Escritura Académica operacionalizada por la *nota transformada* con la *variable temporal*. En todos los casos resultó una correlación positiva.

La muestra fue de tamaño ocho obtenida aleatoriamente de la población de los alumnos del curso.

Los instrumentos de recogida de datos fueron cinco trabajos prácticos elaborados para la experiencia.

Otros recursos metodológicos utilizados fueron: resúmenes estadísticos (coeficiente de correlación lineal, entropía, diagrama de barras y matriz de fallas como representación de la información.

El sistema de matrices de datos para este estudio queda indicado en la tabla 4.

Tabla 4. Sistema de matrices de datos del trabajo 2

Muestra de tamaño ocho de alumnos del curso (N + 1)		
	Escritura Académica (N)	
		Aspectos de la Escritura Académica: Argumentación, Tema, Semántica, Gramática, Coherencia, Cohesión, Representación, Presentación, Cierre. (N – 1)

	Dimensiones del Indicador	Procedimiento
Indicador: Análisis de los datos obtenidos de los cinco trabajos prácticos	Aspectos de la Escritura Académica	Evaluación pluripersonal de las producciones de los alumnos

El indicador de Escritura Académica de las producciones escritas de los alumnos está conformado por una serie de aspectos de la escritura académica que fueron consensuados por el grupo de docentes del equipo de investigación. Los aspectos considerados y la metodología de evaluación seguida están desarrolladas en el Trabajo 2 del Capítulo 4 de Resultados.

3.5.3. Trabajo 3: La comparación de desempeño de dos grupos de estudiantes en la resolución de un problema para evaluar una actividad de Alfabetización Académica.

En este trabajo administramos y evaluamos un postest entre la profesora del curso control y mi persona como profesor del curso experimental. Nuevamente intervengo directamente en la actividad haciendo investigación-acción.

Debido a la forma en que se obtuvo la muestra es un diseño cuasiexperimental, dado que la muestra de tamaño ocho fue seleccionada aleatoriamente de dos poblaciones, el curso experimental y el curso control.

Recordemos que los estudios experimentales pueden clasificarse en orden creciente respecto a su validez interna, es decir, por el grado de control de los efectos de la variable independiente sobre la variable dependiente, estos pueden ser: preexperimentales, cuasiexperimentales y experimentales.

Los diseños preexperimentales se utilizan en investigaciones en las cuales no se puede cumplir con los requisitos exigidos para que sea considerada experimental.

Los cuasiexperimentales son aquellos diseños en los que no es posible un control total. En ciertos estudios se presentan como la única posibilidad y no es posible manipular la variable independiente, sino sólo seleccionarla y esperar a recolectar los datos que muestran los efectos en la variable dependiente. El investigador debe saber que variables no ha podido controlar y reconocer que los resultados pueden estar afectados por estas.

En los diseños experimentales se controlan todos los aspectos que podrían influir sobre la validez interna y aseguran que los efectos sobre la variable dependiente son causados por el tratamiento, es decir, por la variable independiente, con el control de la variables extrañas o contaminante. Este tipo de diseño proporciona datos adecuados y correctos. Es el más potente respecto a su validez interna.

Algunas de las características para que un diseño sea considerado experimental son:

- el investigador interviene en la asignación de sujetos a grupos,
- manipula la variable independiente,
- debe poder controlar las variables extrañas, eliminándolas o manteniéndolas constantes,
- debe permitir una comparación entre dos series de datos,
- no basa sus decisiones en suposiciones estadísticas o de otra especie. (Buendía Eisman, Colás Bravo, 1998)

3.5.3.1. Sobre la utilización de la estadística en nuestra investigación

Es habitual distinguir entre dos ramas de la estadística. Una conocida como Estadística Descriptiva y la otra como Estadística Inferencial. Los métodos de la primera permiten recolectar, resumir, explicar, presentar datos. Estos métodos pueden ser gráficos: histogramas, diagramas de caja y de dispersión o pueden ser numéricos de resumen como: medias, desviaciones estándares, coeficientes de correlación.

Una vez obtenida la muestra de una población al investigador le puede interesar hacer una inferencia de cierto tipo sobre la población. Las técnicas para hacer una generalización en toda la población a partir de una muestra se ubican en la rama de la Estadística Inferencial.

Para realizar la comprobación empírica de la hipótesis debemos recurrir a las pruebas estadísticas pertinentes. El contraste de hipótesis o la comprobación de objetivos es la instancia importante de la investigación.

Es en esta instancia donde el análisis de los resultados por el uso de la estadística permite decidir a favor, o no, de una hipótesis.

En este trabajo se utilizó una prueba t de Student. La utilizada es recomendada para el diseño empleado. Con esta prueba se puede decidir si la diferencia entre dos medias aritméticas es o no estadísticamente significativa a un determinado nivel de confianza.

También en el trabajo se hace una lectura de la noción de innovación planteada por Lucarelli (2003) cuya interpretación permite situarlo como novedoso.

Se introduce la noción de problema y se acude a dos clasificaciones para aplicarla al problema utilizado en la experiencia.

Los conceptos de innovación y de problema y su aplicación en el trabajo hacen que el estudio, en parte, se reconozca como una investigación interpretativa, ya que una de sus dos categorías es la de investigaciones de objetos y fenómenos culturales (Ynoub, 2007).

A continuación, en la Tabla 5 y en la Tabla 6 se indican los sistemas de matrices de datos definidos para cada muestra.

Tabla 5. Sistema de matrices de datos del trabajo 3, curso experimental

Muestra de tamaño ocho de alumnos del curso <i>experimental</i> (N + 1)		
	Evaluación del rendimiento de los alumnos frente a la resolución de un problema (N)	
		Problema planteado a los alumnos (N – 1)

Tabla 6. Sistema de matrices de datos del trabajo 3, curso control

Muestra de tamaño ocho de alumnos del curso <i>control</i> (N + 1)		
	Evaluación del rendimiento de los alumnos frente a la resolución de un problema (N)	
		Problema planteado a los alumnos (N – 1)

Ambas muestras	Dimensiones del Indicador	Procedimiento
Indicador: Análisis de los datos obtenidos de la resolución del problema	Aspectos de la Escritura Académica: Argumentación, Tema, Semántica, Gramática, Coherencia, Cohesión, Representación, Presentación, Cierre.	Evaluación pluripersonal de la resolución del problema

El indicador del rendimiento de los alumnos frente a la resolución de un problema está explicitado en el Trabajo 3, Metodología, p. 70.

3.5.4. Trabajo 4: Las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje que subyacen en un capítulo sobre secciones cónicas.

En este trabajo describimos un capítulo de un libro, razón por la cual consideramos que es una investigación descriptiva en el sentido dado por Ynoub (2007). Esta descripción hace evidente su organización, las partes que lo integran, la importancia que el autor le asigna a cada sección, las relaciones de subordinación entre los contenidos de cada sección y las subsecciones. Para hacer observables estas dimensiones, en primera instancia nos valemos de un Diagrama de Árbol, el cual permite una visión global del objeto de estudio.

Tiene como interlocutores a un autor ideal, construido, imaginario, por una parte, y por otra parte los lectores, estudiantes de un primer curso de geometría analítica. El texto está dirigido específicamente a estudiantes de ingeniería. La utilización mínima de términos como teorema, lema, proposición nos indica que es un texto que no hace énfasis en la estructura formal de la matemática. Suponemos que esta elección respecto al lenguaje fue tomada en función del lector-estudiante cuya formación se está iniciando.

La clasificación aportada por Pozo (1999), hace evidente los contenidos verbales, los procedimentales y los actitudinales propuestos. También analizamos el lenguaje matemático y los modos de representación con la clasificación aportada por Janvier (1987).

De acuerdo con Gimeno y Apple (como se cita en Serradó Bayés y Azcaráte Goded, 2003) se observa la importancia relativa de los temas y se analiza su ubicación en el capítulo y la cantidad de páginas dedicadas a cada uno.

La descripción anterior nos permite interpretar el posible sentido que el autor pretende darle a este capítulo. Con lo cual también la considero como investigación interpretativa, en tanto nos permite observar, con las dimensiones definidas en el artículo, la concepción que subyace en el capítulo respecto a la enseñanza y al aprendizaje.

3.5.5. Trabajo 5: Uso didáctico del error: Una experiencia de aula

En este artículo mostramos, caracterizamos y presentamos una utilización de los errores encontrados en el capítulo 3: Secciones Cónicas, del libro *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal* de Kozak, Pastorelli, Vardanega (2007). Sitúo este estudio en la clase que Ynoub (2007) nomina investigación cualitativa. La autora plantea que “Este tipo de investigación se caracteriza por la manera en que produce sus datos y por los propósitos que persigue con el tratamiento de los mismos.” (Ynoub, 2007, p. 98). Las características son:

- la comprensión de los fenómenos,
- la implicación de los investigadores en la producción de sus datos,
- la observación en contextos naturales,
- la producción de datos ricos, profundos, dependientes del contexto.

Estas características se han dado en este estudio. Así se tiene:

La comprensión de los fenómenos

Entiendo que la aparición de errores en el texto citado es un fenómeno a considerar. Para comprender este fenómeno comenzamos leyendo el capítulo, lo hicimos desde la lectura académica de un texto matemático. En el artículo conceptualizamos este tipo de lectura.

Nos preguntamos: ¿por qué se han producido estos errores? Suponemos que hubo una falla editorial. Dice Pimentel (2007, p. 18)

El editor dirige los pasos precisos para que nazca el libro desde el manuscrito del escritor. La acepción de editor tiene una doble significación: la de actividad profesional –la persona que realiza esos trabajos de edición-, o la de la actividad empresarial –el que arriesga su capital o el de la empresa, como responsable de la empresa editorial-. (Pimentel, 2007, p. 18)

Como profesional el editor debe cuidar que el producto respete los criterios del buen uso de la lengua y, en nuestro caso, la rigurosidad de la ciencia matemática, para eso convoca, si es necesario, a correctores especializados.

También nos preguntamos: ¿qué hacer con estos errores? Decidimos encararlos positivamente utilizándolos didácticamente en actividades que desarrollamos en clase con alumnos.

La implicación de los investigadores en la producción de sus datos

Al leer el capítulo de la forma señalada y categorizar los errores, nos implicamos directamente en la producción de los datos obtenidos.

También propusimos, dirigimos y evaluamos las actividades desarrolladas en clase.

La observación en contextos naturales

El contexto natural del fenómeno para el análisis de la aparición de errores fue el capítulo del libro antes citado. Respecto a la utilización didáctica, esta se desarrolló durante la cursada anual de la asignatura, de modo que el aula del curso K1022 fue el contexto natural de desarrollo de esta actividad.

La producción de datos ricos, profundos, dependientes del contexto.

El trabajo produjo los datos reseñados en el artículo indicado en página 90. El recurso estadístico utilizado, no explícitamente, fue la distribución de la variable cantidad porcentual de errores detectado por las parejas de alumnos.

3.5.6. Trabajo 6: Pensar en utilizar la ambigüedad de las palabras como forma de introducir al estudiante en el lenguaje disciplinar puede parecer una tarea abrumadora. Pero, los alumnos son portadores de esos términos polisémicos, con lo cual, nada mejor que acercarse al objeto de estudio propuesto por el docente, por aproximaciones sucesivas. Es el profesor, a través de actividades adecuadas, el que tiene la posibilidad de lograr redirigir esos conceptos previos polisémicos hacia el significado formal que tienen en la disciplina. En este artículo proponemos una línea de investigación destinada a describir como al estudiante se le ofrece la posibilidad de transformar los términos polisémicos en términos precisos de la disciplina, y si en esta transformación construye el conocimiento propuesto por el docente.

3.6. Sobre las hipótesis y el método de evaluación de las producciones de los alumnos

Del análisis anterior se observa que una investigación puede combinar e integrar distintas metodologías en la construcción del objeto, o producto del proceso de investigación, al que hace referencia Samaja (2005, p. 29).

Acuerdo con Samaja en que "..., cualquiera sea la investigación de que se trate, ella determina un grupo de matrices. *Como mínimo*, tres matrices de datos" (Samaja, 2005, p. 166). Es así como de una observación atenta de los trabajos se hacen observables los sistemas de matrices de datos indicados. Estas matrices fueron desarrolladas en forma explícita a posteriori del trabajo de campo, pero como decía Samaja en sus clases "lo sepa o no lo sepa, el investigador está trabajando con un sistema de matrices de datos, como mínimo, en su investigación" (Samaja 2006a, 2006b).

Respecto a las hipótesis y de acuerdo a Batanero (2001) podemos indicar los distintos niveles de hipótesis en la Tabla 7

Tabla 7. Niveles de hipótesis en nuestro trabajo

Hipótesis	Nuestro estudio
Hipótesis sustantiva	La alfabetización académica mejora el aprendizaje del álgebra lineal y la geometría analítica
Hipótesis de investigación	La alfabetización académica mejora el aprendizaje del álgebra lineal y la geometría analítica en un curso de AGA de la FRBA de la UTN
Hipótesis experimental	El rendimiento académico de los alumnos, que realizaron actividades de AA, frente a la resolución de un problema de geometría analítica, será mayor que los que no las realizaron.
Hipótesis estadística alternativa	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$
Hipótesis nula	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Me interesa subrayar que en los trabajos 1, 2 y 3 analizados tienen un eje común. Este es la evaluación de las producciones de los alumnos. La metodología aplicada en cada experiencia para evaluar estas producciones tiene una secuencia semejante. Recordemos brevemente cual es en cada uno:

Trabajo 1

- Para cada pregunta el equipo docente elaboró una respuesta modelo.
- Construimos una escala para clasificar las respuestas
- Evaluamos las respuestas de manera pluripersonal y la clasificación de las respuestas, de acuerdo a la escala, se obtuvo por la conformidad entre los evaluadores.
- Esto nos permite conocer el estado de comprensión lectora académica de cada alumno

Trabajo 2 y Trabajo 3

- Para cada pregunta o ejercicio el equipo docente construyó una respuesta modelo.
- Se definen ciertos aspectos a considerar para señalar las fallas relacionadas con la escritura académica.
- Se construye una escala para clasificar la producción de escritos de los alumnos de la muestra, de acuerdo con el grado de afinidad con la respuesta modelo.
- Las fallas señaladas permiten clasificar las respuestas.
- Los escritos son corregidos por dos docentes y la calificación (clasificación) de cada respuesta surge del acuerdo entre ambos.

La metodología de evaluación utilizada en nuestros trabajos tiene semejanza con un instrumento denominado Q-Sorts de Apego (Salinas Quiroz, Morales Carmona, Cruz Martinez, Posada, y Carbonell, 2014) (en adelante QSA), y con otras metodologías de evaluación pluripersonal.

Los QSA son instrumentos para la observación, evaluación de la relación de apego cuidadora-madre/hijo-niño. Constan de una cantidad de reactivos, es decir, observaciones típicas, consensuadas por expertos. Este instrumento es aplicado por un equipo, de por lo menos, dos observadores entrenados a tal efecto. Las observaciones de cada uno de los observadores son independientes, y luego son consensuadas. Este tipo de instrumentos son conocidos desde fines de la década del 60. Se han hecho adaptaciones al contexto latinoamericano. En la tabla 8 se pueden observar las semejanzas.

Tabla 8. Semejanzas entre la metodología empleada en nuestros trabajos y la evaluación QSA

Evaluación de los trabajos	Q-Sort Apego
respuesta modelo elaborada por el equipo	observaciones típicas, consensuadas por expertos
evaluación de las respuestas de manera pluripersonal	es aplicado por un equipo, de por lo menos, dos observadores entrenados a tal efecto
la clasificación de las respuestas, de acuerdo a la escala, se obtuvo por la conformidad entre los evaluadores	Las observaciones de cada uno de los observadores son independientes, y luego son consensuadas

La evaluación pluripersonal es un tipo de evaluación muy difundida. Por ejemplo, en los concursos docentes, en los tribunales de evaluación universitaria, La Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU), Normas ISO 9000 aplicadas a la enseñanza y la formación (Van den Berghe, 1998), etc.

Exponer acerca de la metodología de evaluación pluripersonal tiene el propósito de mostrar que la evaluación empleada en nuestros trabajos tiene características semejantes a las de esa metodología.

Capítulo 4: Resultados

4.1. Introducción

Los resultados de esta tesis fueron anticipados en los seis trabajos que fueron publicados en medios científicos. Estos trabajos se mencionan en las paginas 34 y 35 y se transcriben a continuación

4.2. Los trabajos

Trabajo 1: Análisis de una actividad de comprensión lectora sobre un texto de álgebra con alumnos de la carrera de ingeniería

Vicente Messina, Gloria Cittadini, Isabel Pustilnik, Alicia Sara, Carlos Pano,
Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
vmessina@frba.utn.edu.ar, gloria.cittadini@gmail.com, isabel.pustilnik@gmail.com,
aesara_bri@yahoo.com.ar, cpano@doc.frba.utn.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo contamos una actividad de comprensión lectora realizada por estudiantes de Álgebra y Geometría Analítica. Para ello elegimos un texto universitario que trata el trinomio de segundo grado. Caracterizamos la comprensión lectora y el marco de alfabetización académica que la contiene. Describimos el contexto en que fue realizada. Utilizamos como instrumento de evaluación un cuestionario. Diseñamos y aplicamos un procedimiento para clasificar las respuestas al cuestionario y evaluamos el instrumento. Presentamos los resultados. El desarrollo de la actividad estuvo mediado por el aula virtual. Describimos el trabajo de los alumnos y le otorgamos valor acreditativo. Sostenemos que la práctica de la lectura académica aporta a una mejor formación de los ingenieros.

PALABRAS CLAVE: Comprensión lectora, Evaluación, Aula virtual.

INTRODUCCIÓN

Nuestra labor docente se desarrolla en Álgebra y Geometría Analítica para carreras de Ingeniería. Se trata de una asignatura que por sí misma presenta problemas en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje. Algunos de éstos son: el obstáculo del formalismo como se indica en Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000), es decir, la presentación axiomática de algunos temas, poca relación con temas que se han visto en la escuela media como refieren Carlson, Johnson, Lay y Duane Porter (1993) y la coexistencia, en el desarrollo de los temas, de tres lenguajes distintos: abstracto, algebraico y geométrico de acuerdo con Sierpinska, Defence, Khatcherian y Saldanha (1997). Además, se presenta el problema de la traducción del lenguaje cotidiano al formalizado de la matemática, como indica el trabajo de Abate y Badenes (2001) cuando analiza la comprensión lectora de alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Plata.

La investigación que desarrollamos, durante el primer semestre del año en un curso de la asignatura, consta de seis actividades. Este trabajo reporta los resultados de la primera de ellas. El objetivo es conocer el estado de comprensión lectora académica de los alumnos que comienzan a cursarla iniciando sus estudios universitarios. La comprensión lectora es parte de la aptitud verbal. Se entiende la aptitud verbal como la capacidad para comprender palabras, oraciones, enunciados, textos y relaciones entre los mismos. La Comprensión Lectora, según Dubois (1994), implica tres niveles. En el primero el lector comprende el texto cuando es capaz de extraer el significado del mismo. El sentido del texto está en las palabras y oraciones que lo componen y el lector debe descubrirlo. En el segundo la lectura es un proceso activo en el cual el lector integra a sus conocimientos previos el nuevo conocimiento construido por él mismo, a través de la información del texto. El lector trata de encontrar la configuración de esquemas apropiados para explicar el texto. Para el tercero Roseblatt (2002) plantea la lectura como un proceso transaccional, relativo, recíproco, entre lector y texto

que dependen de la cultura, del momento, del contexto en el cual se halla inmerso el lector. Texto y lector interactúan y se modifican mutuamente.

Aquí nos ocupamos de la comprensión lectora de textos académicos matemáticos. Österholm (2006) señala que no existe una diferencia significativa en la comprensión lectora de textos académicos en general y la comprensión lectora de textos académicos matemáticos que utilizan lenguaje natural o coloquial, pero sí con aquéllos en los que predomina la utilización de símbolos matemáticos. La matemática en sí no es el aspecto más importante que afecta la comprensión lectora. El uso de símbolos en el texto es un factor que la dificulta.

La primera actividad de la investigación señalada está enfocada en la lectura, en el marco de la Alfabetización Académica. Con ese marco preparamos los materiales y, también, diseñamos y evaluamos la actividad. La Alfabetización Académica, de acuerdo con Thaiss, Bräuer, Carlino, Grabocsik-Willians y Sinha (2012) y Carlino (2005), permite apropiarse de algunas de las formas de razonamiento instituidas en la cultura discursiva de una disciplina científica o tecnológica. Esta alfabetización busca capacitar para la lectura y la escritura de textos académicos de forma tal que se adquieran los modos en que se realizan las inferencias y las convenciones del lenguaje escrito. La lectura y escritura en educación superior forman parte del quehacer académico y tienen un valor epistémico, con su práctica se aprende.

Leer y escribir sobre las nociones que se estudian en las asignaturas convoca al pensamiento y a la reflexión sobre los conceptos involucrados. Son los especialistas los que pueden ayudar con la lectura y la escritura en la disciplina que enseñan, donde siempre hay una dificultad inherente a cualquier intento de aprender algo nuevo. Por eso la alfabetización académica no es un enfoque que pretende remediar deficiencias en la formación previa, sino que implica que cada una de las cátedras esté dispuesta a abrir las puertas de la disciplina que enseña.

CONTEXTO

La Universidad Tecnológica Nacional desde su origen está comprendida en la concepción asociativa universidad-trabajo y adapta su metodología a estudiantes que o bien trabajan en el ámbito de la especialidad elegida, o bien demandan una rápida y adecuada inserción laboral. En lo concreto esto se traduce en: horarios de clase compatibles con la actividad laboral, clases teórico-prácticas de tipo seminario o taller. El propósito de este tipo de clases es que en ellas exista una interrelación constante entre ambos aspectos. Con un docente a cargo y 75% de asistencia obligatoria y en una baja relación de alumnos por docente o por curso, lo que permite un seguimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La actividad que describimos se desarrolló en un curso de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, asignatura que se cursa en forma anual, con una carga horaria de cinco horas semanales. El curso contó con 61 alumnos que comenzaban su formación universitaria, habían cursado y aprobado el Seminario Universitario de ingreso que se imparte en la Facultad, durante los meses de febrero y marzo, y que cursaban por primera vez materias del primer ciclo de la Facultad Regional Buenos Aires de esa Universidad. Los diseños curriculares de todas las especialidades de las carreras de Ingeniería en la Universidad Tecnológica Nacional contienen la asignatura Álgebra y Geometría Analítica. Esta asignatura tiene el carácter de homogénea, es decir es común a todas las especialidades, y junto con otras de ciencias básicas se imparte en este nivel. El contenido modular del curso consiste en una introducción al Álgebra Lineal y al tratamiento de la Geometría Analítica desde un enfoque vectorial.

En las habituales clases presenciales se desarrollaron los temas propios del programa. La actividad de comprensión lectora se gestionó a través del aula virtual, allí estuvieron instalados los materiales y allí los alumnos dejaron sus producciones. Las consultas se resolvieron a través del foro del aula virtual.

Los alumnos contaron con computadora o facilidad para utilizar una máquina. Pudieron acceder a internet tanto en la Universidad como en sus domicilios y también al aula virtual asignada al curso.

La clase estuvo a cargo de dos profesores: la profesora titular y el jefe de trabajos prácticos. Los dos docentes participaron en cada clase presencial y tuvieron a su cargo el desarrollo de la experiencia que describimos en el marco del proyecto (Pano, Cittadini, Pustilnik, Sara y Messina, 2013) con asiento en la Facultad.

TEXTO PROPUESTO A LOS ALUMNOS PARA SU LECTURA

El texto propuesto de Smith y Gale (1963) ha sido utilizado desde tiempo atrás en la educación superior. Pedimos a los alumnos que realicen la lectura del tema ecuación de segundo grado contenido en el capítulo 1 titulado *Repaso de álgebra y trigonometría*.

Lo elegimos porque es un libro dirigido a estudiantes universitarios, en sus presentaciones hace énfasis en algunos temas que no se encuentran habitualmente en libros de texto de la escuela media, expone los

conceptos de manera rigurosa, es preciso en los desarrollos, ejemplifica claramente, alterna entre el lenguaje coloquial y el simbólico, hace aclaraciones sobre cómo deben leerse los símbolos matemáticos que utiliza, propone ejercicios en forma abundante, aunque carece de representaciones gráficas en el desarrollo del tema elegido.

Nos interesó particularmente porque muestra el completamiento de cuadrados que los alumnos usan en la resolución de las prácticas de la materia, y por la diferenciación que hace entre ecuación de segundo grado y trinomio de segundo grado que motiva a ser precisos en la definición de objetos matemáticos que pueden confundirse.

EL CUESTIONARIO

Para evaluar la actividad de comprensión lectora académica, elaboramos el cuestionario que se muestra en el anexo, con el propósito de conocer con qué grado comprendieron el texto para luego elaborar las respuestas. Consta de ocho preguntas redactadas de manera que sus respuestas estuvieran, aunque no siempre en forma explícita, en el texto. Buscamos que las respuestas pudieran elaborarse con una lectura reflexiva y cuidadosa, sin ser necesario hacer cálculos o desarrollos algebraicos.

Esperábamos también que los alumnos apelaran a sus conocimientos previos y los revisados en el Seminario Universitario de ingreso a la Facultad.

Anteriormente, en octubre de 2014, realizamos una prueba piloto con una versión anterior del cuestionario, en un curso de condiciones similares al de la experiencia. Los resultados obtenidos nos permitieron ajustar las preguntas a un mejor cumplimiento del objetivo. Reescribimos algunas preguntas para que el alumno se enfoque en la lectura del texto. A modo de ejemplo indicamos cómo y por qué se modificó la redacción de la pregunta 8.

Teorema III. - Si el discriminante de un trinomio de segundo grado es positivo, el trinomio* y el coeficiente de x tienen signos contrarios para todos los valores de la variable comprendidos entre los ceros, y el mismo signo para todos los demás valores de la variable.
Si el discriminante es cero o negativo, el trinomio y el coeficiente x tienen siempre el mismo signo.

Fig. 1. Transcripción del teorema III de la página 11 del texto sobre el que los alumnos debían responder a una de las preguntas del cuestionario

La pregunta 8 en la prueba piloto decía: *Encuentre el error en el enunciado del teorema III de la página 11.* El error tiene un grado alto de invisibilidad por lo que lleva a una búsqueda ciega, sin criterio previo. Pocos alumnos pudieron responder.

La Pregunta 8 modificada para la experiencia es: *En el enunciado del teorema III de la página 11 donde dice “ x ”, ¿qué debería decir?* (Ver figura 1).

Al quedar indicado el lugar del error guiamos a los estudiantes a buscar la respuesta con una lectura meticulosa del texto. El error en este caso es tipográfico, la respuesta correcta es: *debería decir x^2* . La mayoría de los alumnos pudo hallar la respuesta correcta.

EVALUACIÓN

La evaluación es un concepto que evoca diferentes significados, así podemos considerar la evaluación como control externo, como función penalizadora, como el cálculo del valor de una cosa, como calificación o como el juicio sobre el grado de suficiencia de determinados aspectos para satisfacer cierto requerimiento.

Distintos autores han definido la evaluación, Lafourcade (1969) propone que “la evaluación es una etapa del proceso que tiene como finalidad comprobar, de manera sistemática, los resultados obtenidos en relación con objetivos especificados con antelación” (Lafourcade, 1969, p. 17), para Stufflebeam y Shinkfield (1989) es

...el proceso de identificar, obtener y proporcionar información útil y descriptiva sobre el valor y el mérito de las metas; la planificación, la realización y el impacto de un objeto determinado, con el fin de servir de guía para la toma de decisiones; solucionar los problemas de responsabilidad y promover la comprensión de los fenómenos implicados. (Stufflebeam y Shinkfield, 1989, p. 183)

En este caso la definición es más amplia y comprende la evaluación de entes como: aprendizajes,

instituciones, sistemas educativos, proyectos, programas. Tembrink (como se cita en Elola, Toranzos, 2000) define evaluación como “... el proceso de obtener información y usarla para formar juicios que a su vez se utilizarán en la toma de decisiones” (Elola, Toranzos, 2000, p. 5)

En lo que sigue haremos la evaluación de las respuestas al cuestionario, del propio cuestionario y, con finalidad acreditativa, de los alumnos participantes. Estas evaluaciones se realizaron utilizando el enfoque ampliado planteado en la definición dada por Stufflebeam y Shinkfield (1989).

EVALUACIÓN DE LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO

El análisis de los resultados obtenidos en la prueba piloto nos llevó a diseñar el procedimiento que consta de los siguientes pasos:

- 1) Para cada pregunta elaboramos una respuesta modelo
- 2) Construimos una escala para clasificar las respuestas, cuyas categorías se definen por el grado de afinidad o semejanza con la respuesta modelo elaborada.
- 3) Evaluamos las respuestas de manera pluripersonal y la clasificación de las respuestas, de acuerdo a la escala, se obtuvo por la conformidad entre los evaluadores.

La respuesta modelo

Las respuestas modelos fueron obviamente correctas y se ajustaron una vez leídas a las producidas por los estudiantes.

1) La escala

La escala ordinal para evaluar las respuestas dadas al cuestionario se definió de la siguiente manera:

- respuesta correcta
- respuesta próxima a la correcta
- respuesta próxima a la incorrecta
- respuesta incorrecta
- respuesta en blanco

La definición de estas clases se logró mediante la discusión y el acuerdo del grupo de investigadores. La discusión y el consenso logrado permitieron:

- a) Considerar correcta toda respuesta que guardara relación de semejanza con el modelo.
- b) Definir como próxima a la correcta a una respuesta con más partes afines al modelo correcto que partes contrarias al mismo.
- c) Definir como próxima a la incorrecta a una respuesta con menos partes afines al modelo correcto que partes contrarias al mismo.
- d) Establecer como incorrecta a una respuesta, toda y en todas sus partes, contraria al modelo correcto.
- e) Considerar respuesta en blanco en el caso que la pregunta no fuera respondida.

En cada caso ejemplificamos con las respuestas a las preguntas de la prueba piloto.

2) La clasificación de las respuestas

Encargamos la corrección de las producciones de los alumnos a tres docentes pidiéndoles que utilizaran los criterios establecidos previamente. Los investigadores que elaboraron los criterios también participaron en la corrección de las respuestas proporcionadas por los alumnos. Hubo, entre ambos grupos de correctores, amplia coincidencia en la atribución de las clases a las respuestas, pero también varias discrepancias. Éstas fueron discutidas hasta acordar los valores.

Esta corrección muestra que, a pesar de realizarla con un cuidado especial y con una guía de criterios establecidos, la evaluación tiene una impronta subjetiva a tener en cuenta. Así tenemos que adherir a Sverdlick (2012) cuando expresa

... ya nadie dude de que aun definiendo operacionalmente las claves de corrección ‘la nota’ puede diferir si la corrección la efectúan personas diferentes, o incluso la misma persona en diferentes momentos o días distintos; la mística de la ‘objetividad’ y de la ‘neutralidad’ continúa vigente”...”En efecto, la lógica positivista que aun prima en la escuela tiene su expresión en la

demanda de criterios y parámetros de evaluación ‘objetivos’, lo que equivale a que sean ‘neutros’ y ‘verdaderos’. Esta idea, asentada en la ilusión de neutralidad o de ecuanimidad de una evaluación ‘objetiva’, supone que existe un valor de verdad por fuera de la construcción que están haciendo los actores en el momento de la evaluación (Sverdlick, 2012, pp. 150, 151).

No pretendemos objetividad en la clasificación. Dado que las respuestas son corregidas por varias personas, éstas pueden disentir respecto del valor que les otorguen, pero como se obligan a consensuar mediante el análisis y la reflexión conjunta a la luz de los criterios establecidos, la calificación que se consiga será una construcción intersubjetiva y por tanto con legitimidad.

EVALUACIÓN DEL CUESTIONARIO

Calculamos el índice de dificultad PD para tener una noción cuantitativa de la dificultad que presenta una pregunta para ser respondida. Este índice es la proporción de personas que responden correctamente la pregunta. Cuanto mayor sea esta proporción, menor será su dificultad. Para su cálculo se utiliza la fórmula (1)

$$(1) \quad PD = \frac{C}{N}$$

Donde C es el número de respuestas correctas y N es el número de alumnos que respondieron la pregunta. La tabla 1 muestra los PD de las ocho preguntas del cuestionario. Las preguntas con PD en un entorno de 0,5 presentan una dificultad media. Esa dificultad es la que consideramos apropiada para nuestro cuestionario.

Tabla 1. Índice de dificultad que presenta cada pregunta

Pregunta	Dificultad
1	0,55
2	0,21
3	0,55
4	0,29
5	0,54
6	0,57
7	0,50
8	0,59

Calculamos el índice de discriminación ID para comparar la proporción de alumnos con altas puntuaciones que han dado respuestas correctas a la pregunta con la proporción de alumnos con bajas puntuaciones que han dado respuestas correctas a la pregunta. Esta comparación da cuenta del poder discriminante que tiene cada pregunta para diferenciar a los alumnos que obtuvieron altas puntuaciones de los que tuvieron bajas puntuaciones. Para su cálculo se utiliza la fórmula (2)

$$ID = \frac{S - I}{T} \quad (2)$$

Donde S es el tamaño del grupo de altas puntuaciones que han dado respuestas correctas a la pregunta, I el de las bajas y T el tamaño común a ambos. El índice de discriminación toma valores del intervalo [-1;1]. Se considera que la pregunta es pertinente cuando el índice es positivo y “poderosa” si es cercano a 1. Existen distintos índices de discriminación según el porcentaje de casos que determinen el tamaño de los grupos.

D’Agostino y Cureton (1975) demostraron que el 21,5% maximiza el índice de discriminación. Usamos ese porcentaje para calcular los índices que aparecen en la tabla 2. De acuerdo con Ebel y Frisbe (como se cita en Backhoff, Larrazolo y Rosas, 2000) las preguntas con ID > 0,39 son buenas discriminadoras.

Tabla 2. Índice de discriminación que presenta cada pregunta

Pregunta	Discriminación
1	0,67
2	0,33
3	0,50
4	0,75
5	1,00
6	0,67
7	0,67
8	0,83

Los índices calculados permiten asegurar la fiabilidad del cuestionario como herramienta de evaluación de la comprensión lectora de los alumnos con respecto al texto seleccionado.

Evaluación acreditativa de los alumnos

Una cuestión que tuvimos que tener en cuenta fue la motivación. ¿Por qué los alumnos querían realizar la actividad que les proponíamos desde la investigación? Hubo dos elementos: Uno, elegimos un tema, “La ecuación y el trinomio de segundo grado”, que es conocido por ellos. El otro, les explicamos las razones por las que investigamos en la universidad y en particular los efectos que los resultados que obtuviéramos tendrían en el mejoramiento de la educación universitaria.

Ellos, como seres humanos, necesitan trascender, sentirse competentes y probarse. Esta necesidad pudieron satisfacerla respondiendo al cuestionario sobre el tema. Como personas jóvenes se interesan y se involucran en causas nobles. Por eso les pedimos la colaboración con la investigación. El sentimiento de competencia y el sentido de colaboración actuaron como motivación intrínseca.

Para reforzar esta motivación les prometimos darle valor acreditativo a la tarea que realizaron. Esta promesa operó como motivación extrínseca. Así fue que asignamos un número a cada clase de la escala de corrección como indica la tabla 3

Tabla 3. Asignaciones de valores numéricos a la escala de clases

Clase	Número
Respuesta correcta	4
Respuesta próxima a la correcta	3
Respuesta próxima a la incorrecta	2
Respuesta incorrecta	1
Respuesta en blanco	0

El trabajo de los alumnos

Los alumnos desarrollaron toda la actividad de comprensión lectora en sus domicilios y en el aula virtual, usando recursos de la tecnología actual. Las clases presenciales estuvieron dedicadas a la enseñanza y al aprendizaje de los temas propios de la materia. “En definitiva los entornos virtuales de aprendizaje permiten aprender sin coincidir en el espacio ni en el tiempo y asumen las funciones de contexto de aprendizaje que en los sistemas de formación presencial desarrolla el aula” (Duart, Sangrá, 2001, p. 31).

La llegada masiva de las TIC ha significado para la sociedad una evolución, que la educación, como factor de movilidad social, debe acompañarla. Freire (2009) nos convoca “la educación, como proceso basado en conocimiento, comunicación e interacciones sociales se ha visto afectada de forma radical por la emergencia de la cultura digital”, la cual, a su vez, “ha transformado a sus actores, profesores y estudiantes provocando la necesidad de cambios en las propias instituciones educativas” (Freire, 2009, p. 2)

Además, el aula virtual como ámbito de resolución de la actividad favorece el aprendizaje colaborativo. Este aprendizaje en Entornos Virtuales implica dejar el protagonismo docente y estimular la participación activa, elaborada, profunda, libre de prejuicios, reflexionada entre los alumnos. Esta participación despierta la curiosidad e imaginación, y se presenta como contracara al hecho de que el alumno, en el desarrollo de las

tareas en forma virtual, deba enfrentarse solo al estudio produciéndole una sensación de aislamiento y soledad que pueda ser causa de abandono. Esta interacción promueve una construcción social del conocimiento y una visión más amplia del aprendizaje dejando paulatinamente los enfoques tradicionales y generando verdaderas comunidades de autoconocimiento de acuerdo con Perez-Mateos (2010).

Los alumnos trabajaron en la actividad durante dos semanas. Para facilitarles la lectura del texto les proporcionamos pautas orientadoras que, como parte de las consignas, acompañan al cuestionario en el correspondiente formulario (ver anexo). Hubo un foro habilitado para la actividad, dedicado a la interacción entre los alumnos, moderado por los docentes. Los docentes utilizaron también el foro para evacuar las dudas planteadas. Las devoluciones a los alumnos de los trabajos evaluados se realizaron a través del espacio de retroalimentación de la plataforma *Moodle*.

Materiales entregados a los alumnos

El primer día de clase presentamos la experiencia, el grupo de investigación y el proyecto en el que convocábamos a participar a los estudiantes. Asimismo les entregamos en forma impresa los siguientes materiales:

- el trabajo práctico 1 que constaba de la consigna, de las pautas de lectura y de escritura y de las ocho preguntas a responder (ver anexo),
- las páginas del texto fotocopiadas a ser leídas,
- el cronograma de entrega de las seis actividades,
- las condiciones para la promoción,
- la indicación sobre el formato que deberían respetar los trabajos a entregar,
- la indicación sobre la forma de nombrar los archivos para subir al aula virtual,
- un tutorial para el uso del editor de ecuaciones.

Además, explicamos oralmente la manera de matricularse en el aula virtual.

Todo este material quedó disponible en el aula virtual. Los alumnos pudieron consultarlo en todo momento y recuperarlo en caso de pérdida u olvido de los impresos entregados.

Resultados.

La realización de esta primera actividad sirvió para introducir a los alumnos en el uso del aula virtual pero fundamentalmente constituyó una experiencia de aprendizaje autónomo en el sentido planteado por Nuñez, Solano y González Pienda (2006).

Los alumnos tuvieron la oportunidad y la responsabilidad de: organizar su trabajo, regular su propio aprendizaje, comprender los conceptos leídos, reflexionar sobre su desempeño en la tarea propuesta, buscar ayudas de sus pares o de los docentes, y presentar su trabajo para mostrar sus logros de acuerdo a las normas establecidas.

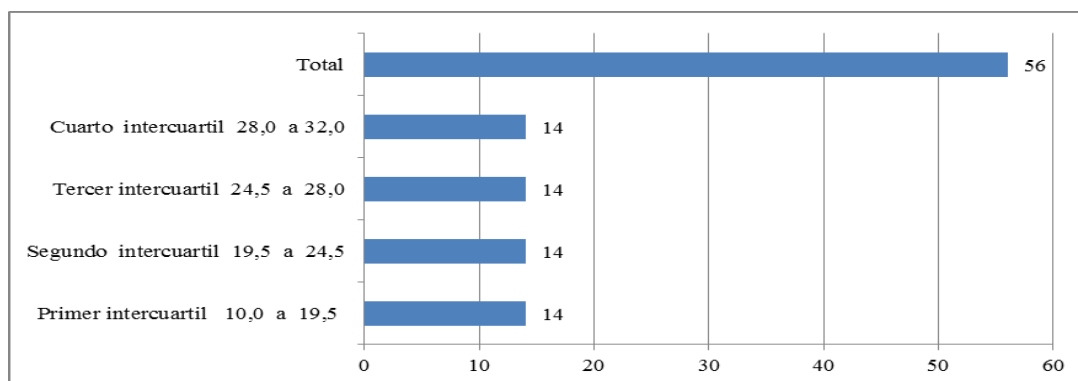
La capacidad de aprender por sí mismos es un requisito para el progreso de los futuros profesionales y para cualquier otro desafío que presente la vida en el mundo actual. Por otro lado, esta actividad tuvo el efecto de ser preparatoria para la realización de las otras cinco previstas en la investigación.

Tal como indicamos las puntuaciones obtenidas por los alumnos pudieron fluctuar entre 0 y 32 con un punto central¹ de 16. La tabla 4 muestra la distribución de frecuencias de esas puntuaciones.

Si bien estos números no son más que representantes de las respectivas clases, nos permiten, a los efectos motivacionales, crear una nota. Como el cuestionario tiene ocho preguntas y a cada respuesta se le puede asignar, como máximo 4 y como mínimo 0, resulta que las puntuaciones que obtienen los alumnos están entre 0 y 32. Estas puntuaciones, vía una transformación lineal, se convierten en notas entre 0 y 10 como las de uso habitual y pasan a ser calificaciones parciales de la cursada.

¹ El punto central es el centro del intervalo cuyos extremos son la menor y la mayor de las puntuaciones posibles

Tabla 4. Distribución de frecuencias de las puntuaciones



En la tabla 4 se observa que el primer cuartil de la distribución es 19,5, el segundo es 24,5 y el tercero es 28. El punto central 16 de las posibles puntuaciones es menor que el primer cuartil. Entonces el 75% de las puntuaciones supera ampliamente ese punto central. A nuestro criterio esta distribución indica que el grupo de alumnos logró una buena comprensión lectora académica a partir de la tarea propuesta.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo presentamos una secuencia para el diagnóstico de la comprensión lectora de los alumnos que comienzan a cursar las primeras materias de una carrera de Ingeniería, y mostramos algunos resultados promisorios.

Nos consta el poco uso que hacen los estudiantes de los textos recomendados. Por eso, entendemos que los docentes universitarios debemos ocuparnos de la lectura académica, proponiendo actividades dirigidas a su práctica y brindando las ayudas que la posibiliten. Con la lectura profunda y reflexiva de los textos se aprende.

En la actividad que contamos en este escrito, los alumnos autónomamente leyeron sobre un tema de álgebra elemental. Tema que necesariamente deben dominar para incursionar en el álgebra lineal y la geometría analítica. Habremos de, generar actividades de lectura de textos de esas disciplinas (y protocolos de evaluación de su comprensión) que propendan al aprendizaje sólido de la compleja red de conceptos que las constituyen y preparar a los estudiantes para que puedan profundizarlos y aplicarlos.

Sostenemos que los estudiantes alfabetizados académicamente serán, en nuestro caso, ingenieros que podrán enfrentar con solvencia los desafíos de la vida profesional y adaptarse con comodidad a los cambios sociales y tecnológicos que cada vez ocurren con mayor rapidez.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abate, M., Badenes, R. (2001). *Una experiencia referida a la comprensión lectora en las actividades de ingreso*. Recuperado 01 de octubre de 2013, <http://www.unlu.edu.ar/~redecom/capitulo 2>.

Backhoff, E., Larrazolo, N. y Rosas, M. (2000). Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA). *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 2 (1).

Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la Alfabetización Académica*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica de Argentina.

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D. y Duane Porter, A. (1993). Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematical Journal*, Vol. 24, No 1.

- D'Agostino, B., Cureton, E. (1975). The 27 percent Rule Revisited. *Educational and Psychological Measurement*. Vol. 35, pp. 45-50.
- Dorier, J., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. Dorier, J. (Ed). *On the Teaching of Linear Algebra*. pp. 85-124. Kluwer Academic Publishers: Netherlands.
- Duart, J., Sangrà, A. (2001). *Aprender en la virtualidad*. Gedisa: Barcelona.
- Dubois, M. E. (1994). *El proceso de lectura: de la teoría a la práctica*. Aique: Buenos Aires.
- Elola, N., Toranzos, L. (2000). Evaluación Educativa. Una aproximación conceptual. OEI. <http://www.oei.es/calidad2/luis2.pdf>.
- Freire, J. (2009). Monográfico "Cultura digital prácticas creativas en educación". *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*. <http://www.raco.cat/index.php/Rusc/article/viewFile/129749/179184>
- Lafourcade, P. (1969). *Evaluación de los aprendizajes*. Kapelusz: Buenos Aires.
- Núñez, J.C., Solano, P. y González Pienda, J.A. y Rosario, P. (2006). El aprendizaje autorregulado como medio y meta de la educación. *Papeles del Psicólogo*. N° 3. Vol. 27.
- Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 63, No. 3, pp. 325-346. Springer Verlag: Germany.
- Pano, C., Cittadini, G., Pustilnik, I., Sara, A. y Messina, V. (2013). *Alfabetización académica en entornos virtuales de aprendizaje y evaluación innovadora con función pedagógica*. Proyecto con asiento en Universidad Tecnológica Nacional Regional Buenos Aires, reconocido por el código 25/C138 en el ámbito del Programa de Incentivos a los Docentes Investigadores.
- Perez-Mateo Subirà, M. (2010). *La dimensión social en el proceso de aprendizaje colaborativo virtual: El caso de la UOC. Comprender y abordar la dimensión social en el trabajo en grupo virtual*. Universitat Oberta de Catalunya. http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/37113/tesi_mperezmateo1.pdf;jsessionid=F5DDD10BA07494D7DE1095F43B2218EB.tdx1?sequence=1. (2010).
- Rosenblatt, L.M. (2002). *La literatura como exploración*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- Sierpinska, A., Defence, A., Khatcherian, T. y Saldanha, L. (1997). A propos de trois modes de raisonnement en algebra linéaire. Dorier, J. (Ed). *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, pp. 248-268. La Pensée Sauvage éditions: Grenoble.
- Smith, F.P.; Gale, A.S. (1963). *Elementos de Geometría Analítica*. Editorial Nigar: Buenos Aires.
- Stufflebeam, D., Shinkfield, A. (1989). *Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica*. Paidós/MEC: Barcelona.
- Sverdlick, I. (2012). *¿Qué hay de nuevo en evaluación educativa? Políticas y prácticas en la evaluación de docentes y alumnos. Propuestas y experiencias de autoevaluación*. Noveduc: Buenos Aires.
- Thaiss, C., Bräuer, G., Carlino, P., Ganobcsik-Williams, L. y Sinha, A. (2012). *Writing programs worldwide. Profiles of academic writing in many places*. <http://wac.colostate.edu/books/wpww/>

Trabajo 2: La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica

Vicente Messina⁷
vrmessina@arnet.com.ar

Gloria Cittadini⁸
gloria.cittadini@gmail.com

Carlos Pano⁹
cpano@doc.frba.utn.edu.ar

Resumen

En este trabajo narramos una actividad de escritura académica realizada por estudiantes de ingeniería y su evaluación. Para ello elegimos un capítulo de un texto universitario que trata sobre secciones cónicas. Describimos el contexto y el trabajo de los alumnos. Caracterizamos la noción de trabajo práctico y su aplicación a este caso. Señalamos el concepto de evaluación seguido. Especificamos los aspectos de un escrito académico en el marco de alfabetización académica y su evaluación en los escritos de los alumnos. Presentamos los resultados. El desarrollo de la actividad estuvo mediado por el aula virtual. Sostenemos que la práctica de la escritura académica aporta a una mejor formación de los ingenieros.

Palabras clave: alfabetización académica - escritura académica – evaluación - geometría analítica - entropía.

Abstract

This work is devoted to narrate the academic writing activity done by engineering students, as its assessment. Therefore, the chosen text was about conic sections. The context where the experience was realized and the student's work was described. The concept of the task, as well as its application was characterized. The followed assessment concept was indicated. Then, the academic writing's aspects were evaluated in the academic literacy framework. The results were presented. The virtual campus made possible the activity's development. From the work it is concluded that the practice of academic writing contributes to a better engineer's formation.

⁷ Vicente Messina es Licenciado en Enseñanza de las Ciencias por la Universidad Nacional de General San Martín Especialista y maestrando en Metodología de la Investigación Científica, por la Universidad Nacional de Lanús, Profesor Adjunto en Álgebra y Geometría Analítica e investigador en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

⁸ Gloria Cittadini Licenciada en Tecnología Educativa, Profesora Titular Ordinaria en Álgebra y Geometría Analítica e investigadora en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

⁹ Carlos Pano es Licenciado en Ciencias Matemáticas, Profesor Titular Ordinario de Probabilidad y Estadística e Investigador en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional, Profesor Regular. Titular de Estadística en la Facultad de Psicología de la Universidad de Buenos Aires.

Keywords: Academic literacy - academic writing – evaluation - analytic geometry - entropy.

Introducción

Todas las instituciones educativas (desde el jardín de infantes hasta la universidad) son responsables de que las personas comprendan mensajes cada vez más complejos de la mejor forma posible. Es por eso que la alfabetización no debería ser considerada privativa de la escuela primaria sino establecerse como un proceso de aprendizaje permanente. En especial porque el vínculo de los adultos con la lengua escrita es mayormente de resistencia a su uso y de dificultad para abordarla de manera placentera y correcta (Castedo, 1995).

Como docentes de Álgebra y Geometría Analítica para carreras de Ingeniería y en el marco del Proyecto de Investigación (Pano, Cittadini, Pustilnik, Sara y Messina, 2013) en el que participamos hemos realizado, con estudiantes de la materia, una experiencia de escritura académica. El objetivo fue realizar una actividad de alfabetización académica en un entorno virtual de aprendizaje. Este trabajo reporta los resultados obtenidos.

La escritura de los alumnos en la universidad está ligada a la lectura y a la comunicación oral. Los estudiantes producen escritos a partir de la lectura de la bibliografía que leen, de la escucha de lo que el docente les transmite y de las interacciones que ocurren en el aula entre ellos y con el profesor. En el caso de la experiencia, los escritos que les pedimos se sustentaron principalmente con la lectura de un capítulo del libro recomendado. También pudieron rescatar ideas del foro virtual al que pudieron acceder.

La escritura académica requiere de la lectura reflexiva del texto elegido, no para reproducirlo sino para iniciar el desarrollo de la propia argumentación. Se trata de un trabajo mental de comprender y ordenar las ideas expuestas en el texto y cotejarlas con las propias. La escritura académica precisa planificación, es decir formulación de objetivos, que pueden modificarse mientras se escribe en virtud de la aparición de nuevas ideas. Necesita transformación, “transformación supone el acceso a la memoria semántica, encontrar la palabra que expresa la idea, colocar la palabra en la frase y leer lo que está saliendo” (Bruning, Schraw, Norby y Ronning, 2005, p.345). También llevar a cabo la revisión para hacer las correcciones y modificaciones que se consideren apropiadas, lo que implica la reorganización y reescritura de lo hecho.

La escritura académica es un modo de apropiarse y transformar el conocimiento que favorece el análisis crítico sobre el propio saber. La palabra escrita no sólo expresa el pensamiento, sino que, su producción, lo desarrolla y le da consistencia. Para agregarle valor es preciso escribir con conciencia retórica, esto es, anticipar el efecto del propio texto sobre el lector. Formar a los estudiantes en escritura académica es una manera de alfabetizar en la universidad. Su práctica es una actividad cognitiva donde el estudiante construye un nuevo conocimiento, combinando lo que ya sabe sobre un tema, con el conocimiento que posee sobre los procesos del discurso y sus objetivos.

La Alfabetización Académica, de acuerdo con Thaiss, Bräuer, Carlino, Grabocsik-Willians y Sinha (2012) y Carlino (2005), permite apropiarse de algunas de las formas de razonamiento instituidas en la cultura discursiva de una disciplina científica o tecnológica. No es un enfoque que pretende remediar deficiencias en la formación previa, sino que implica que cada una de las cátedras esté dispuesta a abrir las puertas de la disciplina que

enseña. Abrir las puertas de Álgebra y Geometría Analítica nos encamina en la dirección de mejorar los aprendizajes de la asignatura.

Contexto

La actividad que describimos se desarrolló en un curso de Álgebra y Geometría Analítica, asignatura que se cursa en forma anual, con una carga horaria de cinco horas semanales. El curso contó con 61 alumnos que comenzaban su formación universitaria, habían cursado y aprobado el Seminario Universitario de ingreso que se imparte en la Facultad, durante los meses de febrero y marzo, Ellos cursaban por primera vez materias del primer nivel de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional. La Universidad Tecnológica Nacional fue creada en 1959 y desde ese año han egresado más de 30.000 profesionales de las distintas carreras de grado. Una de las características es la de ser la única Universidad del país en priorizar la enseñanza y el aprendizaje de las distintas ingenierías. Otra es su carácter federal dado que está integrada por 29 Facultades Regionales que se encuentran distribuidas por todo el país. Esto implica que los sistemas productivos regionales están en permanente relación con la Universidad generando un intercambio académico a nivel nacional. El alumnado que cursa las distintas ingenierías en todas estas Regionales es aproximadamente de 70.000 alumnos que equivale a más del 50 % de todos los estudiantes de ingeniería del país. A pesar de esta masividad, la Universidad considera importante que la razón entre la cantidad de alumnos y la cantidad de docentes por curso permita una relación docente-alumno personalizada. Desde su origen está comprendida en la concepción asociativa universidad-trabajo. En lo concreto esto se traduce en: horarios de clase compatibles con la actividad laboral, clases teórico-prácticas de tipo seminario o taller. Respecto a la asignatura Álgebra y Geometría Analítica los diseños curriculares de todas las especialidades de las carreras de Ingeniería de esta universidad la contienen. Tiene el carácter de homogénea, es decir es común a todas las especialidades, y junto con otras de ciencias básicas se imparte en este nivel. El contenido medular del curso consiste en una introducción al Álgebra Lineal y al tratamiento de la Geometría Analítica desde un enfoque vectorial.

En el curso donde se desarrolló la experiencia las clases presenciales se desarrollaron los temas propios del programa. La actividad de escritura académica se gestionó a través del aula virtual, allí estuvieron instalados los materiales y allí los alumnos dejaron sus producciones. Las consultas se resolvieron a través del foro del aula virtual. Los alumnos contaron con computadora o facilidad para utilizar una máquina. Pudieron acceder a internet tanto en la Universidad como en sus domicilios y también al aula virtual asignada al curso. La clase estuvo a cargo de dos profesores: la profesora titular y el jefe de trabajos prácticos. Los dos docentes participaron en cada clase presencial y tuvieron a su cargo el desarrollo de la experiencia que describimos en el marco del proyecto antes mencionado.

Respecto de los trabajos prácticos

Los trabajos prácticos son un instrumento cuyo objetivo es relacionar la teoría con la práctica y que exige a los alumnos comprensión y análisis de los conceptos que son puestos en juego por el docente. De acuerdo con Steiman (2008) “Consideramos al trabajo práctico

como una propuesta de interpretación y fundamentación teórica que parte de una situación problemática global que contextualiza a cada una de las tareas a realizar” (Steiman, 2008, pp 85-86). Éste análisis y comprensión implica que los alumnos deban interactuar con sus conocimientos previos, con los contenidos explicados, con la lectura de los textos sugeridos, les exige saber qué es lo que saben, pero simultáneamente también les exige tener conciencia de lo que no saben. Para la resolución del trabajo práctico deben usar en forma integrada sus conocimientos y habilidades para resolver tareas específicas y en algunos casos apelar a la creatividad. Los trabajos prácticos se pueden resolver de manera individual o grupal, en el aula o fuera de ella o en un contexto virtual. En cualquier caso, contribuyen a la construcción de los conocimientos específicos de la asignatura.

Según Doyle (1981) la forma de pensar del alumno está condicionada por las tareas que se le pide que realice. Los docentes guían el aprendizaje de los alumnos al diseñar e implementar tareas académicas, en el desarrollo de estos diseños el profesor reflexiona sobre los contenidos, la organización, la secuencia de las actividades, su adecuación al curso y puede prever las posibles interacciones en el aula. Doyle (1982) señala además la tipología de tareas académicas de acuerdo con los procesos cognitivos: tareas de memoria, actividades de rutina o procedimientos, tareas de comprensión, tareas de opinión. A nuestro entender se deberían agregar tareas de creación. Es posible diseñar trabajos prácticos en los cuales los alumnos deban hacer análisis e interpretaciones cada vez más profundos. Esta profundización requiere demandas cognitivas que la acompañen.

Los trabajos prácticos usualmente utilizados en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica están pensados para que el alumno desarrolle un cierto entrenamiento en resolver ejercicios utilizando la fórmula adecuada o siguiendo los pasos convenientes para llegar a la respuesta correcta. Estos trabajos prácticos utilizan el lenguaje de la asignatura de modo que obligan al alumno a tratar de comprenderlo. No ofrecen posibilidades de profundizar pues se limitan a los contenidos que están estipulados en el programa y a los objetivos de la asignatura. No contienen ejercicios integradores y muchos de los ejercicios están destinados a que el estudiante memorice fórmulas, procedimientos y propiedades. No están elaborados para que el alumno trabaje con sus pares. Cuando el alumno se encuentra frente a un ejercicio intuye que debe descubrir cuál es el procedimiento correcto para encontrar la respuesta.

Sobre el diseño de los trabajos prácticos para la experiencia

Para el diseño de los trabajos prácticos preparamos una serie de preguntas y ejercicios que el alumno pudiera responder a partir de la lectura del capítulo elegido. Elaboramos cinco trabajos prácticos. En cada uno de estos se indica cual es la sección del capítulo que abarca los contenidos necesarios para la realización del trabajo, los objetivos a lograr y las pautas de lectura y escritura que el alumno debe seguir para el desarrollo del escrito pedido.

Buscamos que a través de estas actividades el alumno pueda precisar por escrito, en las respuestas a las preguntas, los conceptos leídos, emplear los procedimientos, expuestos en el capítulo, en la resolución de los ejercicios, utilizar el lenguaje formal de las matemáticas y valorar su rigurosidad. También buscamos que pueda apelar a representaciones gráficas utilizando el *software* que le indicamos. Así mismo, nos interesa que pueda adquirir un manejo adecuado del vocabulario del tema dándole a los términos el significado que les corresponde en el espacio contextual de las cónicas.

Texto propuesto a los alumnos para su lectura

El texto elegido es el capítulo 3: Secciones Cónicas. Del libro *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal* de Kozak, A., Pastorelli, S., Vardanega (2007). La elección de este capítulo se debe al tratamiento que hacen del tema los autores. Este tratamiento nos permite ubicar esta sección del libro al comienzo de la cursada de Álgebra y Geometría Analítica y de forma paralela al curso presencial. Circunstancia que podía facilitar la realización de la experiencia.

El libro seleccionado del cual elegimos el capítulo indicado, está en la bibliografía de la asignatura. Tiene la particularidad de que los autores son docentes de distintas Regionales de la Universidad Tecnológica Nacional. Sigue los temas del programa, la presentación es clara en un nivel adecuado para los alumnos que comienzan en una carrera de ingeniería. Cada capítulo comienza con la presentación de un problema de aplicación, no resuelto, referido a los contenidos de ese capítulo. Tiene abundantes ejemplos con su solución, ejercicios propuestos sin la respuesta, una autoevaluación con sus respuestas y un glosario de términos al final de cada capítulo.

El trabajo de los alumnos

Los alumnos desarrollaron la experiencia en sus domicilios y en el aula virtual, usando recursos de la tecnología actual. Las clases presenciales estuvieron dedicadas a la enseñanza y al aprendizaje de los temas propios de la materia. “En definitiva los entornos virtuales de aprendizaje permiten aprender sin coincidir en el espacio ni en el tiempo y asumen las funciones de contexto de aprendizaje que en los sistemas de formación presencial desarrolla el aula” (Duart, Sangrá, 2001, p. 31). La llegada masiva de las TIC ha significado para la sociedad una evolución, que la educación, como factor de movilidad social, debe acompañarla. Freire (2009) nos convoca “la educación, como proceso basado en conocimiento, comunicación e interacciones sociales se ha visto afectada de forma radical por la emergencia de la cultura digital”, la cual, a su vez, “ha transformado a sus actores, profesores y estudiantes provocando la necesidad de cambios en las propias instituciones educativas” (Freire, 2009, p. 2). Además, el aula virtual como ámbito de resolución de la actividad favorece el aprendizaje colaborativo. Este aprendizaje en entornos virtuales implica dejar el protagonismo docente y estimular la participación activa, elaborada, profunda, libre de prejuicios, reflexionada entre los alumnos. Esta participación despierta la curiosidad e imaginación, y se presenta como contracara al hecho de que el alumno, en el desarrollo de las tareas en forma virtual, deba enfrentarse solo al estudio produciéndole una sensación de aislamiento y soledad que pueda ser causa de abandono. Esta interacción promueve una construcción social del conocimiento y una visión más amplia del aprendizaje dejando paulatinamente los enfoques tradicionales y generando verdaderas comunidades de autoconocimiento de acuerdo con Pérez-Mateos (2010).

Los alumnos trabajaron en cada trabajo práctico durante dos semanas. Para facilitarles la lectura y escritura del trabajo les proporcionamos pautas orientadoras que, como parte de las consignas, acompañan a cada trabajo práctico. Hubo un foro de consultas habilitado

para cada trabajo práctico, dedicado a la interacción entre los alumnos, moderado por los docentes. Los docentes utilizaron también el foro para evacuar las dudas planteadas. Las devoluciones a los alumnos de los trabajos evaluados se realizaron a través del espacio de retroalimentación de la plataforma *Moodle*.

Sobre la evaluación

La evaluación en la universidad por lo general constituye una parte diferenciada y puntual del proceso educativo. Se implementa en instancias formales planificadas al finalizar unidades temáticas, consisten en exámenes parciales y finales, generalmente escritos y separados del proceso de enseñanza y de aprendizaje (Alvarez Mendez, 2003). Desde esta perspectiva la evaluación cumple la función social e institucional de acreditar saberes y habilidades. Esta acreditación se caracteriza por dos puntos, el primero que desvincula el examen del desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje. El segundo que desvirtúa la relación del alumno con el docente en cuanto a que se estudia para aprobar y se enseña lo que se va a evaluar (Díaz Barriga, 1992).

Las evaluaciones centradas en la medición, presupone que la puntuación en una prueba tiene el mismo significado para todos los individuos y que es “objetiva y neutral”. Desde la perspectiva constructivista nosotros construimos el mundo de acuerdo con nuestros valores y percepciones. El sujeto cognitivo es un constructor activo de sus estructuras de conocimiento. Se evoluciona de un estado cognitivo a otro. Cada uno de los autores que han aportado a esta corriente léase: Piaget, Vigotsky, Maturana, Ausubel, Novak, von Glaserfeld. Bruner tratan de explicar la construcción de ciertas estructuras a partir de otras diferentes. Coherentes con este enfoque pensar en una “puntuación verdadera” en el sentido de establecer una medición cuantitativa objetiva de los conocimientos del estudiante se hace difícil de sostener. Así tenemos que adherir a Sverdlick (2012) cuando expresa:

... ya nadie dude de que aun definiendo operacionalmente las claves de corrección ‘la nota’ puede diferir si la corrección la efectúan personas diferentes, o incluso la misma persona en diferentes en momentos o días distintos; la mística de la ‘objetividad’ y de la ‘neutralidad’ continúa vigente”...”En efecto, la lógica positivista que aun prima en la escuela tiene su expresión en la demanda de criterios y parámetros de evaluación ‘objetivos’, lo que equivale a que sean ‘neutros’ y ‘verdaderos’. Esta idea, asentada en la ilusión de neutralidad o de ecuanimidad de una evaluación ‘objetiva’, supone que existe un valor de verdad por fuera de la construcción que están haciendo los actores en el momento de la evaluación (Sverdlick, 2012, pp. 150, 151).

De acuerdo con Mateo y Olmo (2008) el presupuesto implícito en lo que se denomina psicometría clásica está en suponer que existe un constructo que explica la naturaleza de la conducta humana, que se puede definir con precisión y por tanto es posible construir una prueba que nos permita capturar su esencia y medirla. Los modelos conductistas dieron soporte teórico a un universo de pruebas denominadas objetivas. Por ello, buscar significados objetivos en las prácticas, escolares sabiendo que el evaluador aporta su

subjetividad, durante el proceso de evaluar, no es conducente. Subjetividad que está integrada por supuestos previos acerca del objeto a evaluar y por sus supuestos teóricos e ideológicos. Con lo cual el evaluador que renuncia a buscar objetividad prefiere el concepto de intersubjetividad. Donde la validación de la información se genera a través de estrategias que permiten a los evaluadores y a los evaluados la posibilidad de acordar o disentir respecto a los resultados de la evaluación. En este caso se posee consciencia que el conocimiento es una construcción social y por lo tanto intersubjetiva, que refleja acuerdos, con lo cual esta intersubjetividad legitima al producto que se obtenga.

La evaluación alternativa

Darling-Hammond (2014) señala que para muchas personas la evaluación alternativa se define más fácilmente por lo que no es. Es decir, cualquier procedimiento que aplique instrumentos cuyo diseño implique un intento de percibir, captar, discernir el rendimiento en forma distinta de las formas clásicas planteadas por la psicometría, es decir, pruebas de elección múltiple o alguna de las pruebas objetivas centrada en la medición y el control de los resultados, se puede considerar como una evaluación alternativa. Desde esta perspectiva la evaluación alternativa abarca una amplia gama de actividades donde se espera que el alumno construya una respuesta original, antes que reconozca una respuesta potencialmente correcta de una lista predeterminada. Las actividades pueden ser desde completar una frase con unas pocas palabras, pasando por la escritura de un ensayo a la realización de un análisis de una investigación de laboratorio en el cual el alumno participe en forma activa y no sólo como observador. La evaluación alternativa se presenta como un paradigma de cambio respecto a los modelos de medición hacia modelos donde es parte integral del proceso enseñanza y de aprendizaje. Por supuesto que las evaluaciones acreditativas pueden usarse para el aprendizaje, pero el interés de la evaluación alternativa está en que la valoración es parte esencial del proceso pedagógico, además el alumno es participante activo en la construcción de significado y cuya inserción refleja una valoración de las normas de rendimiento y la necesidad de la metacognición en el aprendizaje (Gipps y Stobart, 2003). El desempeño de los estudiantes de acuerdo con Darling-Hammond (2014) se juzga con criterios pre-establecidos, basados en el discernimiento humano y apunta a la evaluación de conocimientos complejos y de alto nivel de pensamiento y que tengan relación con contextos reales. Se dice que la evaluación alternativa es auténtica cuando las tareas que el alumno ejecuta tienen como contexto situaciones del mundo real. Como señalan Mateo y Olmo (2008) cuando aparece un nuevo término, casi al mismo tiempo surgen variaciones en su significado. Este es el caso de la evaluación alternativa, se consideran sinónimos los términos evaluación alternativa, auténtica y de ejecución. La evaluación auténtica y la de ejecución no son lo mismo. Para que una evaluación sea auténtica las tareas que deben desarrollar los alumnos deben estar asociadas a la vida real. En la de ejecución esta condición no es imprescindible.

En definitiva, la evaluación basada en ejecuciones (*performance based assessment*) y la auténtica son dos modalidades dentro del denominado enfoque alternativo, en el cual, la evaluación de ejecución requiere que los estudiantes, en un momento determinado, justifiquen, construyan, realicen un producto o solución a partir de pautas determinadas (Gips y Stobart, 2003). En esta misma línea Khattri y Sweet (como se cita en Mateo y Olmo, 2008) señalan que adoptar el enfoque de la evaluación de ejecución involucra los

siguientes pasos a realizar por los estudiantes: estructurar las tareas objetos de evaluación, aplicar información previa, construir respuestas, explicar el proceso que los ha llevado a una determinada respuesta.

La evaluación de las producciones escritas de los alumnos que participaron en la experiencia

Habitualmente en la evaluación en los exámenes escritos de matemática el profesor atiende fundamentalmente a los razonamientos y a los resultados obtenidos, no reparando en otros aspectos de la escritura. En nuestra experiencia pretendimos hacer una evaluación más amplia de la escritura académica matemática. Les planteamos a los estudiantes un trabajo que los responsabilizaba de su propio aprendizaje y buscamos generar hábitos de revisión y control de los propios procesos. La evaluación de estos trabajos necesitó mecanismos que hagan evidentes los distintos aspectos de la escritura académica, además de una participación docente diferente. Esta evaluación obliga a que los docentes encargados deban actuar como coevaluadores consensuando, acordando, no sólo para dirimir la calidad de un escrito matemático, sino para conocer la destreza del estudiante para comunicar por escrito.

Se trató de evaluar los escritos de los alumnos derivados de la lectura del capítulo antes mencionado, teniendo presente que el tema no fue tratado en las clases presenciales. Los escritos respondieron a las demandas docentes. Estas fueron de dos tipos:

- Respuestas a preguntas
- Resoluciones de ejercicios

El procedimiento de evaluación consta de los siguientes elementos.

1. Para cada pregunta o ejercicio el equipo docente construyó una respuesta modelo.
2. Hay aspectos a considerar para señalar las fallas, relacionadas con la escritura académica, que los escritos contienen.
3. Hay una escala para clasificar los escritos, cuyas categorías se definen por el grado de afinidad con el modelo construido por el equipo.
4. Las fallas señaladas concurren para clasificar las respuestas con la escala.
5. Los escritos son corregidos por dos docentes y la calificación (clasificación) surge del acuerdo entre ambos.

La respuesta modelo

Para cada pregunta o ejercicio el equipo construyó una respuesta modelo. Esta respuesta será obviamente correcta, está convenientemente fundamentada, ordenada su presentación y explicada.

Los aspectos considerados y acordados por el grupo de investigación evaluados en los escritos son:

- Argumentación
- Cierre
- Coherencia
- Cohesión
- Gramática

- Presentación
- Semántica
- Tema
- Representación

En el proceso de corrección nos interesa detectar las fallas que el estudiante escritor comete en los aspectos señalados. Para eso, a continuación, describimos las fallas a considerar en los distintos aspectos.

Argumentación: El escrito a evaluar contiene razonamientos inadecuados, desarrolla demostraciones incorrectas, formula argumentos inapropiados, carece de explicaciones

Cierre: En el escrito no se definen o explican símbolos o términos que son utilizados en el trabajo.

Coherencia: En el escrito faltan títulos o subtítulos cuando debieran estar. Se omite la transcripción de la pregunta o del enunciado del ejercicio. No se señala la o las respuestas. Falta la presencia de un hilo conductor que le otorgue unidad al texto producido.

Cohesión: El escrito presenta partes desconectadas, no tiene conexión lógica entre algunos enunciados y, entre párrafos verbales y gráficos o tablas. Carece de conectores adecuados.

Gramática: El escrito contiene faltas de ortografía, oraciones mal construidas o mal enlazadas, o hace un empleo incorrecto de los signos de puntuación.

Presentación: El trabajo debe respetar las normas de presentación: título, subtítulo, apellido y nombre, curso al que pertenece, fecha de entrega, tipo y tamaño de letra.

Semántica: El escrito presenta un uso incorrecto de los términos, en particular de los términos técnicos o confunde el significado de las palabras.

Tema: El escrito no responde a la pregunta o desacuerda con el enunciado del ejercicio.

Representación: El escrito omite nombres globales en las tablas de datos y gráficos, y en sus partes constitutivas. Exhibe un tratamiento inadecuado de las expresiones algebraicas o las locuciones simbólicas.

La escala

Para evaluar las respuestas de los alumnos usamos una escala ordinal. Las clases de la escala son:

- respuesta correcta
- respuesta próxima a la correcta
- respuesta próxima a la incorrecta
- respuesta incorrecta
- respuesta en blanco

Se asignó a cada respuesta un valor numérico a los fines de conformar una nota para cada ejercicio, como se indica en la tabla n° 1.

Respuesta	Nota
Respuesta correcta	4
Respuesta próxima a la correcta	3
Respuesta próxima a la incorrecta	2
Respuesta incorrecta	1
Respuesta en blanco	0

Tabla n° 1. Asignaciones de valores numéricos a las respuestas

Consideramos:

- correcta toda respuesta que guarda relación de semejanza con la respuesta modelo.
- próxima a la correcta a una respuesta con más partes afines al modelo correcto que partes contrarias al mismo.
- próxima a la incorrecta a una respuesta con menos partes afines al modelo correcto que partes contrarias al mismo.
- incorrecta a una respuesta, toda y en todas sus partes, contraria al modelo.
- respuesta en blanco en el caso que no haya respuesta.

Si bien los resultados, desde el punto de vista de la matemática, a que lleguen los estudiantes hacen a la calidad de los escritos, no son determinantes para la clasificación. Un resultado matemáticamente incorrecto no será clasificado como 1 (respuesta incorrecta) si no hay fallas en los aspectos considerados o las hay en una cantidad no significativa. De similar manera, un resultado matemáticamente correcto no será clasificado como 4 (respuesta correcta) si hay fallas en los aspectos considerados en una cantidad significativa.

La corrección de los escritos

De los escritos de los alumnos que participaron de la experiencia elegimos ocho al azar. Las condiciones materiales en que realizó la experiencia no nos permitieron considerar, para este artículo, la totalidad. Todos los escritos surgieron a partir de la lectura del capítulo del texto indicado más arriba.

Cada escrito es corregido por dos docentes. Si ambos coinciden en la asignación de la clase de la escala, esta queda como definitiva; en caso contrario interacturán para resolver por consenso, con convencimiento mutuo, la asignación.

La lectura y evaluación de las producciones de los alumnos están afectadas por las concepciones que el docente investigador tiene sobre evaluación y estas son puestas en juego en la tarea. El procedimiento de evaluación de los escritos, por parejas docentes participantes del proyecto, con criterios establecidos y con respuestas modelo que utilizamos en la experiencia hace que ese equipo deba discutir, reflexionar, analizar, acordar. Es un procedimiento que no busca la objetividad, pero como se obligan a consensuar mediante el análisis y la reflexión conjunta, a la luz de los criterios establecidos, la calificación que se consiga será una construcción intersubjetiva y por tanto con legitimidad.

Definición de la matriz de fallas

La matriz de un alumno da cuenta de las fallas que surgen en los distintos aspectos de cada ejercicio. Hay nueve aspectos a considerar y quince ejercicios en la totalidad de los trabajos prácticos. Cuando un alumno en el ejercicio i-ésimo incurre en por lo menos una

falla del aspecto j-ésimo lo indicamos con 1 (uno) y lo denotamos *éxito*, caso contrario lo indicamos con 0 (cero) y lo señalamos como *fracaso*. Esta información para cada alumno define una matriz de quince filas por nueve columnas. Es una matriz de unos y ceros, con lo cual se tienen así 135 variables dicotómicas. En la tabla n° 2 presentamos la matriz correspondiente al alumno A. Habiendo agregado una columna con la nota arriba definida y una fila con la suma por columnas que denominamos vector de éxitos por aspectos.

	Alumno	Ejercicio	Nota	Arg	Te	Sem	Gram	Coher	Cohes	Rep	Pre	Ci
TP2	A	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
		2	2	1	0	1	0	1	0	0	0	0
		3	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
TP3	A	1	4	1	0	0	0	1	0	1	0	0
		2	2	1	0	0	1	1	0	1	0	0
		3	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
		4	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
TP4	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
		2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
TP5	A	1	2	1	0	1	1	1	0	1	0	0
		2	3	0	0	1	1	1	1	0	0	0
		3	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
TP6	A	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0
		2	2	1	0	0	1	1	1	0	1	0
				12	4	7	9	15	6	8	5	2
Suma por columnas o vector de éxitos por aspectos												

Tabla n°2. Matriz de fallas del alumno A

Es posible mostrar la evolución de cada alumno en sus escritos, a través de la variable *nota transformada*, en función de la sucesión temporal de trabajos prácticos. La nota transformada estará constituida por cada una de las notas obtenidas en cada ejercicio del trabajo práctico correspondiente. Para calcular el valor asignado a la variable se sumaron las notas obtenidas por el alumno en cada ejercicio del trabajo práctico y esa suma se dividió por cuatro veces la cantidad de ejercicios del trabajo práctico. Así la nota transformada queda independiente de la cantidad de ejercicios del trabajo práctico. Hallamos la nota transformada para los ocho alumnos y calculamos el coeficiente de correlación lineal, entre el número de trabajo práctico (indicador del tiempo) y la nota transformada, para cada alumno, obteniendo los valores mostrados en la tabla n° 3.

Tabla n° 3. Coeficiente de correlación lineal para cada uno de los ocho alumnos

	TP2	TP3	TP4	TP5	TP6	Coeficiente de correlación lineal R
Alumno A	0,33	0,50	0,25	0,50	0,38	0,1212
Alumno B	0,75	0,44	0,58	0,67	0,88	0,4574
Alumno C	0,67	0,63	0,75	0,92	0,50	0,6481
Alumno D	0,75	0,81	0,58	0,92	0,88	0,4293
Alumno E	0,67	0,44	0,75	0,67	0,88	0,6392
Alumno F	0,42	0,50	0,25	0,33	0,33	0,0000
Alumno G	0,67	0,5	0,58	0,42	0,88	0,2998
Alumno H	0,33	0,69	0,42	0,50	0,50	0,4004

Se puede observar que los coeficientes de correlación lineal son no negativos. Esto indica que en el transcurso de la experiencia la nota transformada fue en aumento. Puede considerarse que la evolución de los escritos académicos matemáticos de los alumnos en los sucesivos trabajos prácticos de la experiencia fue mejorando. Otra idea que nos permite conocer la dispersión de la distribución de éxitos de un alumno en los aspectos es el concepto de entropía.

Entropía

En Garcia Mayoraz (1989) leemos que entropía es un término de origen griego, viene de la palabra *tropee* que significa, transformación o cambio. Desde el punto de vista termodinámico es una medida de la transformación de la energía. Fue creado en 1876 por el físico alemán Rudolf Clausius (1822-1888). Permite cuantificar los valores de transformación de la energía, es decir, permite calcular las variaciones de entropía entre dos estados de un sistema que evoluciona entre ellos. Ludwig Boltzmann (1844-1906) logró llegar al concepto de entropía partir de la teoría atómica y la probabilidad, preguntándose sobre los factores que afectan a la probabilidad de que una molécula se mueva con cierta velocidad. Según su teoría, un sistema que evoluciona espontáneamente de un estado de menor probabilidad a otro de mayor probabilidad. Es decir, mayor desorden, mayor entropía y el estado más desordenado es el estado más probable. Claude E. Shannon (1916-2001) a finales de la década del cuarenta propone una teoría que mide la cantidad de información contenida en un mensaje. Se puede calcular un valor promedio de información como la cantidad media de información por símbolo de la fuente, se expresa como H.

$$H = - p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - \dots - p_k \ln p_k$$

En una distribución de frecuencias la entropía se calcula con la fórmula anterior reemplazando las probabilidades p_i por las frecuencias relativas correspondientes. De acuerdo con Reuchlin (1976) ésta noción de dispersión de una distribución nominal podrá ser tanto mayor cuanto mayor es el número de clases. Para un número fijo de clases será mayor si las observaciones se reparten igualmente sobre todas las clases en lugar de concentrarse sólo en algunas. Se puede explicitar y cuantificar esta noción definiendo y calculando la entropía de la distribución de éxitos en los aspectos. La entropía para los ocho alumnos se muestra en la tabla n° 4.

Alumno A: 2,07	Alumno B: 1,74	Alumno C: 1,90	Alumno D: 1,89
Alumno E: 2,00	Alumno F: 1,87	Alumno G: 1,72	Alumno H: 1,90

Tabla n° 4: Valores de entropía de los escritos de los ocho alumnos

Se observa que el alumno G obtuvo menor entropía tiene una mayor concentración de éxitos en algunos de los aspectos, y el alumno A, con la máxima entropía, sus éxitos se reparten entre todos los aspectos. Con lo cual podemos concluir que al alumno G es conveniente que revise los aspectos donde se concentran el mayor número de éxitos. En cambio, al alumno A será necesario que ponga atención en todos los aspectos. En el gráfico n° 1 se muestra las distribuciones de éxito dos alumnos. El alumno A tiene en sus escritos más éxitos que el alumno G. Se puede observar mayor dispersión en A que en G.

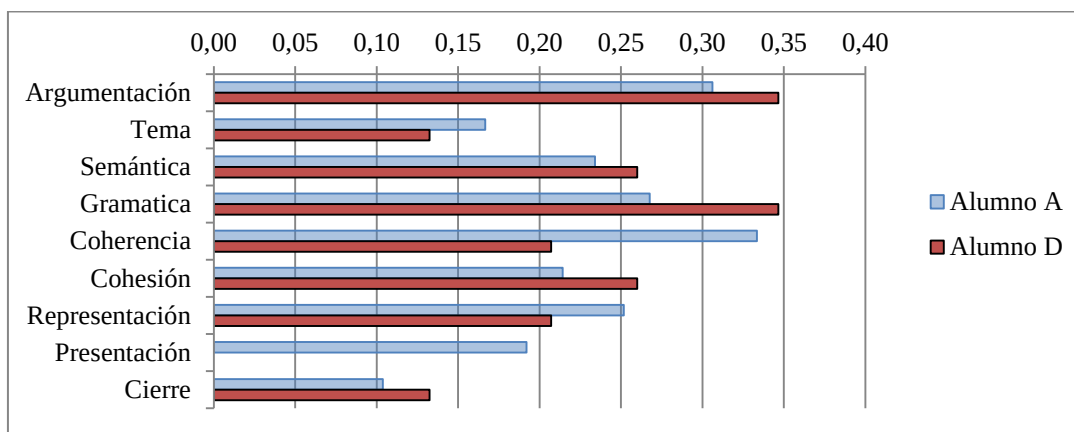


Gráfico n°1: Dispersión de éxitos, por aspectos, en dos alumnos

Reflexiones finales

Este estudio llevado a cabo a principios del año 2015 permitió observar los escritos de alumnos de ingeniería que recién comienzan su formación. Nos encontramos con escritos que muestran que alumnos tienen dificultades para comunicar sus ideas. Nos consta el poco uso que hacen los estudiantes de los textos recomendados. Por eso, entendemos que, como docentes universitarios, debemos ocuparnos de la escritura académica, proponiendo actividades dirigidas a su práctica. El objetivo de la experiencia consistió en poner en función una actividad de alfabetización académica para propender al mejoramiento del aprendizaje de las secciones cónicas. En la experiencia que contamos los alumnos autónomamente leyeron y escribieron, siguiendo pautas, sobre un tema de la geometría analítica que deben dominar. Habremos de, generar actividades de escritura de textos académicos en álgebra lineal y geometría analítica, que abran caminos al aprendizaje sólido de la compleja red de conceptos que los constituyen y preparen a los estudiantes para que puedan profundizarlos y aplicarlos. Sostenemos que los estudiantes alfabetizados académicamente serán, en nuestro caso, ingenieros que podrán enfrentar con solvencia los desafíos de la vida profesional y adaptarse con comodidad a los cambios sociales y tecnológicos que cada vez ocurren con mayor rapidez.

Bibliografía

- Álvarez Méndez, J.M. (2003). *La evaluación a examen. Ensayos críticos*. Buenos Aires: Miño y Dávila.
- Bruning, R., Schraw, G., Norby, M. y Ronning, R. (2005). *Psicología cognitiva y de la instrucción (4ta ed.)*. Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la Alfabetización Académica*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica de Argentina.
- Castedo, M. L. (1995). “Construcción de lectores y escritores”. *Lectura y vida*. Año 16, N° 3: 5-24.

- Darling-Hammond, L. (2014). *Next generation assessment. Moving beyond the bubble test to support 21st century learning*. San Francisco: John Wiley and Sons.
- Díaz Barriga, A. (1992). *Didáctica. Aportes para una polémica*. Buenos Aires: Aique.
- Doyle, W. (1981). “La investigación sobre el contexto del aula: hacia un conocimiento básico para la práctica y política de formación del profesorado”. *Revista de Educación*, 277, pp. 29-42. Madrid: MEC. Recuperado el 07/04/2016 de <http://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre277/re2770200503.pdf?documentId=0901e72b813c3054>
- Doyle, W. (1982). *Academic work*. National Commission on Excellence in Education. Washington: Department of Education. Recuperado el 09/05/2016 de la base de datos ERIC.
- Duart, J.M. y Sangrá, A. (2001). *Aprender en la virtualidad*. Barcelona: Gedisa.
- Freire, J. (2009). Monográfico “Cultura digital prácticas creativas en educación”. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*. Recuperado el 10/06/2015 de <http://www.raco.cat/index.php/Rusc/article/viewFile/129749/179184>
- Garcia Mayoraz, J. (1989). *Entropía y Lenguajes*. Buenos Aires: Hachette.
- Gipps, C. y Stobart, G. (2003). Alternative Evaluation. En Kellaghan, T. y Stufflebean, D. (Eds.). *International Handbook of Educational Evaluation* (pp. 549-573). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kozak, A.M., Pastorelli, S. y Vardanega, P. (2007). *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal*. Buenos Aires: McGraw-Hill Interamericana.
- Mateo, J. y Olmo, F.M. (2008). *La evaluación alternativa de los aprendizajes*. Barcelona: Ediciones Octaedro.
- Pérez-Mateo Subirà, M. (2010). *La dimensión social en el proceso de aprendizaje colaborativo virtual: El caso de la UOC. Comprender y abordar la dimensión social en el trabajo en grupo virtual*. Universitat Oberta de Catalunya. http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/37113/tesi_mperezmateo1.pdf;jsessionid=F5DDD10BA07494D7DE1095F43B2218EB.tdx1?sequence=1. Recuperado el 01/03/2015.
- Pano, C., Cittadini, G., Pustilnik, I., Sara, A. y Messina, V. (2013). *Alfabetización académica en entornos virtuales de aprendizaje y evaluación innovadora con función pedagógica*. Proyecto con asiento en Universidad Tecnológica Nacional Regional Buenos Aires, reconocido por el código 25/C138 en el ámbito del Programa de Incentivos a los Docentes Investigadores.
- Reuchlin, M. (1976). *Compendio de estadística: Método conceptual*. Madrid: Pablo del Rio Editores.
- Steiman, J. (2008). *Más didáctica (en la educación superior)*. Buenos Aires: UNSAM Edita.

- Sverdlick, I. (2012). *¿Qué hay de nuevo en evaluación educativa? Políticas y prácticas en la evaluación de docentes y alumnos. Propuestas y experiencias de autoevaluación.* Noveduc: Buenos Aires.
- Thaiss, C., Bräuer, G., Carlino, P., Ganobcsik-Williams, L. y Sinha, A. (2012). *Writing programs worldwide. Profiles of academic writing in many places.* <http://wac.colostate.edu/books/wpww/> Recuperado el 01/06/2014.

Trabajo 3: La comparación del desempeño de dos grupos de estudiantes en la resolución de un problema para evaluar una actividad de alfabetización académica.

Vicente Messina¹, Teresa Gil¹, Carlos Pano¹,

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
Medrano 951, Buenos Aires.

vmessina@frba.utn.edu.ar, tgil@gmail.com, cpano@doc.frba.utn.edu.ar,

Resumen. Este trabajo trata sobre la comparación en el desempeño en una prueba, de resolución de problemas, de dos grupos de estudiantes. Un grupo participó en una actividad de escritura académica, el otro operó como control. Se considera a la actividad como una experiencia de innovación pedagógica. El diseño para la comparación es de dos grupos con posttest al grupo experimental y al grupo control. Una definición sirve de marco al problema y se lo clasifica según dos criterios. Estadísticamente no se pudo argumentar a favor de la hipótesis propuesta.

Palabras Clave: Innovación pedagógica, Escritura académica, Diseño cuasi experimental, Resolución de Problemas.

1 Introducción

En Messina, Cittadini, Pano [1] narramos una actividad de escritura académica. Fue ésta una práctica experiencial de innovación pedagógica. Sus características principales fueron: el control del aprendizaje fue desplazado a los estudiantes, la actividad estuvo mediada por un aula virtual.

Nos interesa en este lugar subrayar el carácter innovador de la experiencia. Para precisar el concepto de innovación que nos guió seguimos el pensamiento de Elisa Lucarelli [2]:

“La innovación es aquella práctica protagónica de enseñanza o de programación de la enseñanza, en la que, a partir de la búsqueda de la solución de un problema relativo a las formas de operar con uno o varios componentes didácticos, se produce una ruptura en las prácticas habituales que se dan en el aula de clase, afectando el conjunto de relaciones de la situación didáctica.” (Lucarelli, p. 19)

Hicimos de esta definición una lectura que nos permitió incorporar elementos y explicaciones que ayudan a dar significado al concepto de innovación, tal como se muestra a continuación:

- El concepto de “práctica de enseñanza” lo entendemos en un sentido amplio, que incluye el aprendizaje y los entornos en que se da, la evaluación y las actividades que realizan docentes y alumnos para la formación profesional de estos últimos.
- En consonancia con a) el “protagonismo” de la práctica es del docente que impulsa la acción innovadora, de los estudiantes que participan y de cualquier otro acto que intervenga en el hecho educativo.
- La frase “búsqueda de la solución de un problema relativo a las formas de operar con uno o varios componentes didácticos” hace pensar que, con las prácticas actuales, hay un problema que entorpece la buena formación de los estudiantes y así aparece la necesidad de mejorarlas. La solución innovadora afectará a varios componentes didácticos como las participaciones de los docentes y alumnos, los contenidos a desarrollar, las estrategias a emplear, los recursos tecnológicos de apoyo, los ámbitos de encuentro y las interrelaciones entre ellos.
- La idea de “una ruptura en las prácticas habituales que se dan en el aula de clase” indica un cambio con lo que tradicionalmente se hace, con lo institucionalmente establecido o con modelos reproductores de enseñanza y aprendizaje. El cambio no es sólo por algo nuevo sino por la construcción de nuevas estrategias pedagógicas y uso de recursos de la época, con la intención de mejoramiento.

El objetivo de la citada experiencia consistió en poner en función una actividad de alfabetización académica para propender al mejoramiento del aprendizaje del tema Secciones Cónicas. Corresponde

entonces hacer una evaluación de la experiencia innovadora. Para eso ensayamos, mediante un diseño de comparación de grupos, la hipótesis de que la actividad desarrollada mejora el aprendizaje del tema.

Comparamos, entre dos grupos de alumnos, el desempeño en una prueba, que consistió en la resolución de un problema. Los alumnos cursaban la asignatura Álgebra y Geometría Analítica en dos cursos distintos de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional. Álgebra y Geometría Analítica es una asignatura del primer nivel de los planes de estudio de todas las especialidades de la ingeniería que se enseñan en la Facultad. El problema correspondía a una aplicación del tema Secciones Cónicas.

2 Metodología

Para la comparación trabajamos en dos cursos, denominamos curso *experimental* a uno de ellos y curso *control* al otro.

En el curso experimental se desarrolló la actividad de alfabetización académica regulada por el aula virtual, allí los alumnos encontraron consignas para la lectura del material y pautas para abordar la escritura académica y allí dejaron sus producciones. Las consultas se resolvieron a través del foro del aula virtual. En las clases presenciales de este curso no se trató el tema Secciones Cónicas. La resolución del problema formó parte de la actividad de escritura académica. Uno de los autores de este trabajo orientó la actividad.

En el curso control se trató el tema de forma tradicional, la profesora explicó Secciones Cónicas en el tiempo indicado en el cronograma de la materia. Hizo una introducción al tema con un ejemplo motivador, desarrolló los contenidos teóricos de los mismos, resolvió ejercicios de la guía de trabajos prácticos y respondió las preguntas que fueron surgiendo. Al finalizar la explicación, la profesora propuso a los alumnos que resuelvan el problema. La profesora fue otro de los autores de este trabajo.

Los alumnos de ambos cursos compartieron el mismo horario de cursada (turno mañana), se conectaron por primera vez con una materia de nivel universitario, contaron con los mismos materiales y recibieron iguales recomendaciones para resolver el problema e indicaciones para la presentación por escrito de la solución hallada.

Los alumnos del curso experimental subieron el escrito al aula virtual y los del curso control lo entregaron en papel. Todos dispusieron, para la realización del trabajo, de un tiempo de dos semanas.

Por abandono de la cursada de la materia, hubo alumnos que no entregaron el escrito con la resolución del problema. De los alumnos del curso experimental que sí entregaron se seleccionaron ocho al azar para formar el grupo experimental y de los alumnos del curso control que también entregaron se seleccionaron ocho al azar para formar el grupo control.

La Figura 1 muestra la conformación de los grupos a comparar.

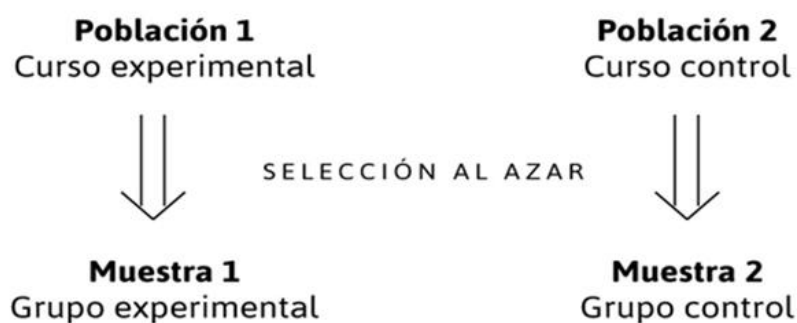


Figura 1. Selección de los grupos a comparar

Evaluamos y corregimos los trabajos siguiendo el procedimiento descrito en Messina, Cittadini, Pano [3]. Es un procedimiento de evaluación pluripersonal, que compara las producciones de los alumnos con un modelo construido por los docentes y que atiende a aspectos que hacen a la escritura académica. La aplicación de este

procedimiento permite calificar los trabajos con notas numéricas con valores entre 0 y 4. Ordenamos al azar los 16 trabajos y los corregimos en el orden obtenido.

3 Diseño

El diseño empleado, en la terminología de Buendía Eisman, Colás Bravo y Hernández Pina [3], se designa como *Diseño de dos grupos con postest al grupo experimental y al grupo control*.

Consideramos como tratamiento recibido por los alumnos del grupo experimental su participación en la actividad de alfabetización académica regulada por el aula virtual. Los alumnos del grupo control no participaron de ninguna actividad de alfabetización académica. El postest consistió en la resolución del problema. La variable independiente, participación en una actividad de alfabetización académica, tuvo dos modalidades, la participación y la no participación. La variable dependiente fue la nota obtenida en la resolución del problema. Los estudiantes, por provenir de dos poblaciones, no fueron asignados al azar a los grupos que conformaron las muestras, pero si fueron seleccionados al azar de las respectivas poblaciones (ver Figura 1). Esta última particularidad nos lleva a considerar que el diseño es cuasi experimental. Es un diseño que ofrece algunas ventajas, pero también presenta ciertas desventajas.

Entre las ventajas podemos señalar:

- No hubo mortalidad experimental porque los grupos se formaron a partir de los alumnos que concluyeron la experiencia y entregaron el trabajo.
- Para poner en juego el entusiasmo o interés de los alumnos para realizar la tarea, se le dio valor acreditativo a la nota que obtuvieron.
- No se aplicó con anterioridad una prueba similar a ninguno de los dos grupos, no hubo pretest. Esta circunstancia evitó que los dos grupos hayan sido medidos dos veces y por lo tanto una influencia de este tipo sobre la variable dependiente.
- Los alumnos de ambos grupos pertenecían a cursos que compartían el mismo horario de clase, cursaban por primera vez la materia y con idéntico programa. Para responder al postest recibieron las mismas instrucciones. Estas características aportaron a la similitud de los grupos.
- Los cambios psicológicos o en las aptitudes intelectuales, que pueden deberse al cursado de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, pudieron darse en ambos grupos, por lo que jugaron a favor de la comparabilidad.

Las desventajas que hemos notado son:

- Al haber seleccionado las muestras, una de cada población establecida de antemano, la variable independiente no pudo ser manipulada. No hubo asignación al azar de los participantes a los grupos, por lo que no quedó garantizada la equivalencia de los grupos, esto ocurrió por la imposibilidad de tratar un tema, con alumnos de un mismo curso, de dos formas distintas.
- La condición de que los grupos fueron seleccionados de cursos distintos, con docentes diferentes, posibilitó que sus integrantes tuvieran experiencias externas que pudieron afectar a la variable dependiente.

4 Prueba estadística

El análisis estadístico que hemos utilizado para el diseño empleado es la aplicación de la prueba de hipótesis t de Student. Designamos con μ_i la media de la i -ésima población, $i = 1, 2$. Contrastamos la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra la alternativa $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ en prevención de que el tratamiento tuviera un efecto de sentido contrario al esperado. Los datos fueron procesados con Statistix 9 y los resultados se muestran en la Figura 2. Concluimos en que no hay suficiente evidencia que permita rechazar la hipótesis nula.

Two-Sample T Tests for Nota by <u>Grupo</u>						
Grupo	N	Mean	SD	SE		
Experimental	8	2.1250	1.1260	0.3981		
Control	8	2.0000	1.1952	0.4226		
Difference		0.1250	1.1611	0.5806		
T-Tests for Mean Difference						
Null Hypothesis: difference = 0						
Alternative <u>Hyp</u> : difference <> 0						
					95% CI for Difference	
Method	Variances	DF	T	P	Lower	Upper
Pooled	Equal	14	0,22	0,8326	-1.1202	1.3702
Satterthwaite	Unequal	14,0	0,22	0,8326	-1.1206	1.3706
Homogeneity of Variances		DF	F	P		
Folded F Test		7,7	1.13	0,4395		
Cases Included 16 Missing Cases 0						

Fig.2. Resultados obtenidos con el programa Statistix

5 El problema

En la educación universitaria, la resolución de problemas se presenta como una actividad cada vez más extendida. Esta actividad debe ser vista como una estrategia explícita que permite construir nuevos conocimientos, es también una actividad que permite interrelacionar el pensamiento crítico y reflexivo con la creatividad y capacidad de inventiva necesarias para encarar la búsqueda de las soluciones. Nos preguntamos, ¿qué es un problema? Para precisar la noción de problema recurrimos a la definición de Pano, Fridman, Rodil Martínez, Torres y Zion [4]:

Un problema es una situación propuesta intencionalmente por el docente o por el alumno, con el objetivo de promover un aprendizaje significativo y el desarrollo del pensamiento crítico y autónomo, que requiere el despliegue de modalidades de trabajo algunas veces individuales y otras grupales. La situación ofrece una dificultad inicial para su comprensión y su resolución, por cuanto los sujetos que la enfrentan poseen inicialmente ante ella un estado de incertidumbre y no completo cognoscitivamente. El problema se presenta como un desafío teórico o práctico que, para ser abordado, exige a los alumnos la comprensión de la situación desde sus conocimientos previos y con ayudas apropiadas. Precisa, para su resolución, la generación de estrategias y la construcción de conocimientos para encontrar soluciones factibles y detectar la óptima. Es un proceso que apunta al desarrollo de competencias profesionales. (Pano et. al., p. 43)

El problema constitutivo del postest fue tomado del libro Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal de Kozak, A., Pastorelli, S., Vardanega, P. [5] y propuesto a los alumnos por los docentes, con el objetivo de evaluar un tema incluyendo aspectos que hacen a la escritura académica. Para resolverlo no es suficiente aplicar una fórmula o un procedimiento conocido. Hay que construir la solución a partir de lo que se conoce y hacerse de otros recursos para completar la obra. Es un problema que queda abarcado por la definición anterior.

En la bibliografía se encuentran disponibles variadas y abundantes clasificaciones de problemas. Una clasificación tiene un valor práctico. Pensando en pedagogía universitaria, al alumno solucionador lo orienta

sobre los recursos que necesita para resolver el problema, al docente lo guía en la elección del que propone en función de las aptitudes intelectuales o habilidades prácticas que desea ejercitar.

Rovere [6] presenta, entre otras, una clasificación que distingue entre problemas estructurados, semiestructurados e inestructurados. Los problemas estructurados reconocen una estructura explicativa determinativa que está construida con relaciones de causalidad. Las condiciones de inicio determinan los resultados. Son problemas de certidumbre. Estos problemas pueden expresarse en términos de razonamientos deductivos: Si A entonces B. En un problema semiestructurado las explicaciones se conectan mediante relaciones que conllevan un cierto grado de probabilidad. Son problemas de incertidumbre bien definida. Tienen una expresión en términos de razonamiento plausible: Si A entonces B es posible. Los problemas inestructurados tienen una estructura con ligaduras laxas que deja al solucionador grados de libertad para encontrar soluciones o explicaciones novedosas, pero no le garantiza que el problema será resuelto. Son problemas de incertidumbre mal definida que abren el espacio a la creatividad.

El problema del postest cuenta con una única solución definida y lógica. Es una solución que permanece a lo largo del tiempo. Para alcanzar dicha solución se necesita ser hábil para extraer deducciones que sean válidas y tener un pensamiento riguroso. La solución está determinada por el enunciado, o sea, por las condiciones de partida. Se trata, por lo tanto, de un problema estructurado como muchos de los matemáticos. Revelli, Messina, Gil y Pano [7], en el análisis de un texto, clasifican los problemas según el relato de su enunciado. Dicen que los enunciados de los ejercicios o problemas pueden ser: (a) de relato de una realidad, (b) de relato de tono realista, (c) de relato meramente matemático y (d) de relato de investigación matemática. Agregan que esta clasificación no es exhaustiva, pero contempla a los ejercicios o problemas que generalmente aparecen en los libros de texto de matemática. Un problema con enunciado de tono realista se resuelve por aplicación de los contenidos del texto a una situación concreta, descrita en lenguaje cotidiano. La resolución del problema implica una traducción del enunciado al lenguaje formal de la matemática. Se trata de simular una cuestión con visos de realidad. En el enunciado se encuentran todos los datos necesarios para resolver el ejercicio. El problema del postest trata sobre la cúpula de un edificio diseñado para exposiciones. El enunciado contiene una figura que muestra las dimensiones principales de la cúpula y en otra figura representa las estructuras que la soportan, acompañadas por datos sobre sus elementos. Estas estructuras son arcos parabólicos que se unen a la cúpula por medio de barras, así se muestra en la figura. Se trata de calcular las longitudes de las barras que unen los arcos parabólicos con la cúpula, cuya sección transversal es semi-elíptica. Es un enunciado formulado en lenguaje cotidiano. Por la simpleza de las figuras, que invitan a agregar un sistema de coordenadas para pasar a expresar las curvas en el lenguaje de las ecuaciones, pareciera que es un enunciado preparado por el autor para ejercitar a los alumnos lectores. Se trata, por lo tanto, de un problema con enunciado de relato de tono realista.

6 Conclusiones

El análisis estadístico no aportó argumentos a favor de la hipótesis de que la actividad de alfabetización académica desarrollada mejora el aprendizaje del tema Secciones Cónicas. Si bien se trabajó experimental y estadísticamente bajo el principio de parsimonia habrá que revisar el diseño y, consecuentemente, el método estadístico.

Sin embargo, sabemos que la práctica de la escritura obliga a los alumnos a desplegar una actividad intelectual interesante que los hace principales protagonistas de la labor y estimula la autocritica sobre el propio saber. También “tiene la *potencialidad* de ser una forma de estructuración del pensamiento que lo devuelve modificado” Carlino [8], es lo que denomina función epistémica de escritura. Es, sin duda, una estrategia que favorece el aprendizaje. Por lo tanto, habrá que tomar el presente como un estudio exploratorio y llevar a cabo una investigación más completa.

Referencias

1. Messina, V.; Cittadini, G.; Pano, C.: La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica. *Perspectivas Metodológicas*. Aceptada su publicación en el N° 19, Vol. 1, Universidad Nacional de Lanús, disponible a partir del mes de mayo de 2017.

2. Lucarelli, E.; *El eje teoría práctica en cátedras universitarias innovadoras su incidencia dinamizadora en la estructura didáctica curricular*. Tesis doctoral. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires (2003).
3. Buendía Eisman, L.; Colás Bravo, P.; Hernández Pina, F.: *Métodos de Investigación en Psicopedagogía*. McGraw-Hill/Interamericana de España (1998).
4. Pano, C.; Fridman, C; Rodil Martínez, A.; Torre, V. y Zion, V.: *Apuntes sobre Innovación en Educación Universitaria*. Ediciones Rosel (2011).
5. Kozak, A. M., Pastorelli, S. y Vardanega, P.: *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal*. McGraw-Hill Interamericana (2007).
6. Rovere, M.: *Planificación estratégica de recursos humanos en salud*. O. P. S. Washington D. C. (1993)
7. Revelli, M.; Messina, V.; Gil, T.; Pano, C.: Descripción y análisis de un capítulo sobre secciones cónicas. *Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. XIX. Encuentro Nacional. XI Internacional*, pp. 487-495. http://www.frnsn.utn.edu.ar/EMCI/files/Acta_XIXEMCI.pdf. Accedido 15 de febrero 2017. Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional San Nicolás (2015)
8. Carlino, P.; *Escribir, leer y aprender en la universidad-Una introducción a la alfabetización académica*. Fondo de Cultura Económica de Argentina (2005).

Trabajo 4: Las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje que subyacen en un capítulo sobre secciones cónicas

Vicente Messina, Marina Revelli, Isabel Pustilnik, Carlos Pano
Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica
Nacional
vrmessina@arnet.com.ar, mrevelli@gmail.com, Isabel.pustilnik@gmail.com,
cpango@doc.frba.utn.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo es analizado un capítulo sobre secciones cónicas. Se discuten algunas concepciones sobre la matemática y sus efectos en la enseñanza y el aprendizaje y se analizan las concepciones subyacentes en el texto. Es utilizada la estructura de diagrama de árbol para representar la organización de los contenidos. Se analizan los objetivos que los autores plantean en las secciones, así como el tratamiento de los contenidos temáticos y el lenguaje que utilizan. Se identifican los temas importantes mediante un criterio externo. Los ejercicios propuestos son clasificados según el relato de sus enunciados y según las demandas cognitivas que exigen. Se ubica al capítulo entre los textos tecnológicos.

PALABRAS CLAVE: Concepciones sobre la matemática. Clasificación de ejercicios. Cónicas.

ABSTRACT

In this work a chapter about conics sections is analyzed. We discuss some conceptions about mathematics and their effect on teaching and learning. We infer about underlying conceptions in the text. We use a tree diagram structure to represent its contents organization. We study the chapter sections thoroughly to comment the objectives that the authors consider, the treatment about thematic contents and the language that they use. We identify which are the most important topics using an external criterion. We classify proposed exercises according to their statement and the cognitive demand required to solve them. This chapter is categorized as a technological text.

KEYWORDS: Algebra. Conceptions about mathematics. Text structure. Exercise classification. Conics.

INTRODUCCIÓN

Motivados por el análisis y conclusiones sobre un trabajo experimental realizado con nuestros alumnos, basado en un capítulo del libro de Kozak, Pastorelli, Vardanega. (2007), nos propusimos analizar las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje subyacentes en el texto. El libro fue escrito por tres profesores de distintas Facultades Regionales de la Universidad Tecnológica Nacional, con destacadas trayectorias en la docencia universitaria. Si bien fueron tres los autores, para analizar el texto, construimos un nuevo autor, lo imaginamos como un maestro conocedor de la disciplina que enseña, como un ser humano cuyas ideas y pensamientos están marcado por la vida vivida, sus experiencias y su labor docente. Un autor que interpreta los contenidos que escribe desde su marco cognoscitivo que es propio y único. A ese marco Alba Gonzales Thompson lo denomina concepciones. Para ella, las concepciones constituyen “una estructura mental general que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y gustos” (Thompson, 1992, p. 130).

A partir de las observaciones, análisis de documentos, de las opiniones, de las respuestas a preguntas sobre su práctica, Contreras (1998) define como la concepción de un profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática al conjunto de posicionamientos que un profesor tiene sobre su práctica en relación con las cuestiones que puedan surgir respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Las concepciones son existencias personales de cada sujeto. Al haber tres autores del libro, cada uno con sus propias ideas y, al plantearnos inferir las concepciones a partir del capítulo leído, tuvimos que apelar a la

figura del autor construido y pensarlas con forma de constructos hipotéticos. Las explicaciones y conclusiones de este trabajo se refieren a ese autor y no a los reales.

El capítulo de nuestro interés versa sobre secciones cónicas. Distintos autores pueden escribir sobre un mismo asunto matemático de diversas maneras. El tratamiento elegido depende de la visión sobre la matemática que el autor tenga, del ordenamiento dado a los subtemas, del fin que persiga, de los recursos que utilice para presentar los contenidos a la audiencia a la que decidió dirigirse, de sus predilecciones personales, es decir, de sus concepciones.

En la investigación de Moreno y Azcárate (2003), se muestra que, entre otros factores, las concepciones de los profesores universitarios de matemática tienen respecto a la matemática influyen en su práctica docente.

Los textos, en particular el de nuestro interés, tienen, por un lado, una marca subjetiva; Dubois (2005) afirma que, según el enfoque psicolingüístico, “el sentido del texto no está en las palabras u oraciones que componen el mensaje escrito, sino en la mente del autor y en la del lector cuando reconstruye el texto en forma significativa para él”. (Dubois, 2005, p. 11).

Por otro lado, la organización materializada del contenido le otorga un carácter eminentemente objetivo. Ambos lados interesan porque dan cuenta de las concepciones del autor. En tanto el capítulo se use en un curso para el tratamiento del tema Secciones Cónicas determinará, en forma explícita o implícita y en gran parte, la forma en que el profesor encare la enseñanza y las actividades de aprendizaje que realizarán los alumnos. De acuerdo Litwin (2008) en la praxis docente se entrecruzan el estilo de enseñanza del profesor y el proceso de aprendizaje de los alumnos.

CONCEPCIONES SOBRE LA MATEMÁTICA

Son muchos los pensadores, vinculados a la actividad matemática que, a través de los tiempos, han reflexionado acerca de esta disciplina. La reflexión sobre qué es el conocimiento matemático forma parte de la epistemología e interesa a la hora de analizar el capítulo sobre secciones cónicas. A manera de ejemplo comentamos algunas pocas de estas consideraciones. Ana Elena Narro Ramírez (1997) en su artículo nos cuenta:

Para Galileo Galilei (Físico y astrónomo italiano, 1564-1642) la matemática es indispensable para lograr un conocimiento formal, concepción que resalta al afirmar que: “Con la Matemática el hombre alcanza el pináculo de todo conocimiento posible, un conocimiento no inferior al que posee la inteligencia divina”

Isaac Newton (Físico inglés, 1642-1727) indica que la Matemática predice o descubre los fenómenos de la Naturaleza. Newton es autor de “Principia Mathematica”, donde presentó un esquema innovador del universo, que cierra con broche de oro la revolución científica. (Narro Ramírez, 1997, p. 257)

Para Galileo la matemática transcurre entre reglas y objetos ideales conformando un conocimiento supremo, en cambio para Newton se conecta con el mundo a través de la naturaleza.

Jean Kuntzmann (Matemático francés, 1912-1992) es conocido por sus trabajos en matemáticas aplicadas y ciencias de la computación que, desde épocas muy tempranas, han producido desarrollos en ambos campos. En Kuntzmann (1969) escribió:

Una definición de la matemática por su método es más estable y no ha cambiado desde la antigüedad griega hasta nuestros días. La matemática desarrolla, a partir de nociones fundamentales, teorías que se valen únicamente del razonamiento lógico. El grado de lucidez de esta manera de obrar tal vez haya variado en el transcurso del tiempo, o según los diversos individuos, pero su naturaleza no se ha alterado. El objeto sobre el cual versa el razonamiento matemático es por sí mismo arbitrario. Basta que un determinado objeto de estudio permita el tratamiento matemático, que le interese a un matemático, o aquellos en beneficio de los cuales trabaja, para que nazca un nuevo capítulo de la matemática. (Kuntzmann, 1969, p. 12)

Richard Courant (Matemático alemán con nacionalidad estadounidense, 1888–1972) fue asistente de David Hilbert, quien fue el director de su tesis doctoral. Fue profesor de la Universidad de Nueva York. Allí fundó el

que hoy se conoce como Instituto Courant de Ciencias Matemáticas, que es un respetable centro de investigación en matemáticas aplicadas.

Herbert Robbins (Matemático estadounidense, 1915–2001) fue uno de los matemáticos más destacados del siglo XX. Muchos de los resultados que logró como investigador hoy llevan su nombre.

Courant y Robbins fueron los autores de la obra *¿Qué es la Matemática?* Allí podemos leer:

La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad. Aunque diversas tradiciones han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el supremo valor de la ciencia matemática” (Courant y Robbins, 1979, p. 3)

Kuntzmann, en el libro que citamos, reconoce que la matemática va cambiando e incorporando nuevos resultados y teorías a lo largo del tiempo. Esto hace imposible definirla por sus contenidos. Por eso opta por definirla por su método. Al hacerlo pone en primera línea el razonamiento lógico ocultando otras formas de pensamiento. En cambio, Courant y Robbins entienden que la matemática requiere también otros tipos de razonamientos. Necesita de la intuición, de lo plausible, del todo y las partes, de lo abstracto y lo concreto. Su valor está en la síntesis de las fuerzas opuestas que mencionan en el párrafo que transcribimos.

CONCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Para pensar cómo las concepciones de un profesor o autor, sobre la matemática, repercuten en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina destacamos su naturaleza dual. De acuerdo con Douady (1986) esta dualidad dialéctica objeto-herramienta es posible considerarla como un sistema abstracto y autocontenido o como un instrumento para la resolución de problemas prácticos en situaciones reales. Tenemos así dos caras de una misma moneda. Quien se apoya fuertemente en la primera cara considera que los objetos matemáticos tienen una existencia propia. Para él, objetos tales como la parábola o la simetría existen de la misma manera que una pelota de fútbol, independientemente de cualquier contexto cultural. Para enseñarlos sólo hay que mostrarlos, definirlos e indicar sus propiedades tal como se haría con la pelota, mostrarla, reparar en su forma y material con que está hecha, hacerla picar. Se aprende lo que el profesor o el texto da. Es un aprendizaje receptivo, el alumno o el lector guarda los contenidos que recibe en su memoria, puede repetirlos, pero no vincularlos con otros conocimientos o situaciones del mundo real. Quien se sostiene en la otra cara ve la otra dimensión de la matemática, menos abstracta y descontextualizada, más funcional y relacionada con la resolución de problemas prácticos en situaciones concretas, más pragmática y situada. La enseñanza y el aprendizaje no se pueden separar, en este sentido, de la acción concreta sobre los objetos, del razonamiento inductivo, de los procedimientos heurísticos ni tampoco de los instrumentos y recursos tecnológicos que ayudan a aprender. Los aprendices son activos e interactivos en la construcción de sus propios conocimientos, con las herramientas de las que disponen, con lo que ya conocen y con la mediación de la cultura en la que están inmersos. Las actividades de aprendizaje son tanto individuales como sociales.

LA ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

Entendemos la organización del capítulo como el conjunto de principios mediante los cuales el autor, conforme a sus propósitos, decide el peso de importancia de cada sección, las partes que las integran, las relaciones de subordinación entre los contenidos de cada sección y entre las secciones. La figura 1 muestra una representación simplificada de esos principios. Esa representación se denomina Diagrama de Árbol. Los contenidos aparecen con la numeración que les otorgó el autor.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

De acuerdo con Vilar, Gomez y Tejero (1997) el Diagrama de Árbol es una herramienta que permite una mejora de la calidad en el ciclo PDCA (*Plan*: planificar, *Do*: hacer, *Check*: comprobar, *Act*: actuar) que permite identificar los medios necesarios para alcanzar una meta o resolver un problema, en la etapa de planificación, a través de una visión global del objeto de estudio.

Partiendo de una información general, como la meta a alcanzar, se incrementa gradualmente el grado de detalle sobre los medios necesarios para su consecución. Este mayor detalle se representa mediante una estructura en la que se comienza con una meta general (el “tronco”) y se continúa con la identificación de niveles de acción más precisos (las sucesivas “ramas”). Las ramas del primer nivel constituyen medios para alcanzar la meta, pero, a su vez, estos medios también son metas, objetivos intermedios, que se alcanzarán gracias a los medios de las ramas del nivel siguiente. Así repetidamente hasta llegar a un grado de concreción suficiente sobre los medios a emplear.

La utilización del Diagrama de Árbol permite descomponer cualquier meta general, de modo gráfico, en fases u objetivos concretos, así como determinar acciones detalladas para alcanzar un objetivo.

En el caso que nos ocupa la meta general consiste en la exposición del tema Secciones Cónicas. De este tronco se desprenden una pluralidad de ramas de primer nivel; son las doce Secciones, la Autoevaluación y el Glosario.

Las Secciones indican los contenidos temáticos (medios) para alcanzar la meta, y también son las ramas iniciales de los ramales que parten del tronco. La Autoevaluación se puede considerar como una falsa rama ya que no apunta hacia la meta; propone once ejercicios para que el lector pueda verificar en qué medida comprendió lo leído. El Glosario precisa de manera compacta los términos considerados importantes y utilizados en el desarrollo del capítulo.

Las Secciones son a su vez metas intermedias que se alcanzan con los contenidos de las ramas del segundo nivel que llamaremos Sub-secciones. Las Sub-secciones también pueden pensarse como metas que se alcanzan con los contenidos de las ramas del tercer nivel. De esta manera van apareciendo contenidos que, más detalladamente, aportan al alcance de la meta. Si se nos permite la terminología, llamaremos a las ramas del tercer nivel Sub-sub-secciones. Las Sub-sub-secciones son a la Sub-sección lo que la Sub-sección es a la Sección. El mismo criterio se puede emplear para las Sub-sub-sub-secciones.

A modo de ilustración mostramos los contenidos de la Sección 3.2 señalados con la terminología usada.

3. Capítulo: Secciones cónicas

3.2. Sección: Lugar geométrico de R^2

3.2.1. Sub-sección: Lugares geométricos simétricos

3.2.1.1. Sub- sub-sección: Simetría con respecto a una recta

3.2.1.1.1. Sub- sub-sub-sección: Simetría con respecto al eje y

3.2.1.1.2. Sub- sub- sub-sección: Simetría con respecto al eje x

3.2.1.2. Sub-sección: Simetría con respecto a un punto

3.2.1.2.1. Sub- sub- sub-sección: Simetría con respecto al origen de coordenadas

La figura 1 muestra el diagrama de árbol cuyo tronco y las sucesivas ramas se señalan con los identificadores que les otorga el índice.

LAS SECCIONES

En el contexto de la experiencia, encaramos este trabajo para pensar las ayudas que el profesor debe brindar tanto como para que los estudiantes hagan una lectura reflexiva del capítulo como para que realicen las actividades pedidas. Desde esta preocupación nos interesa encontrar respuesta a preguntas, hechas al capítulo, tales como: ¿Qué objetivos plantea? ¿Cómo se presentan los contenidos? ¿Cómo aparecen las definiciones? ¿Cómo se diferencian las definiciones de las proposiciones demostrables? ¿Cómo se relacionan las secciones? ¿Qué muestran los ejemplos? ¿A qué apuntan los ejercicios? ¿Qué recursos y estrategias metodológicas se requieren para resolverlos?

La sección 3.1 es de presentación del tema tratado en el capítulo. Plantea un problema de aplicación a la ingeniería que es resoluble con los procedimientos que se desarrollan en las secciones posteriores. Comenta, con información pertinente, que las cónicas revisten un papel importante, tanto en la física en general, como en la ingeniería en particular. Formula los objetivos que transcribimos a continuación. En la sección 3.1 se puede leer:

Esperamos que al finalizar la lectura comprensiva y activa del presente capítulo, usted sea capaz de dar respuesta a problemas fundamentales de la geometría analítica como:

- Dada una ecuación de dos variables $f(x;y) = 0$, determinar el lugar geométrico (si existe) que representa en el plano cartesiano $(x;y)$, lo cual significa estudiar la disposición relativa de los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación. A esto se le llama interpretar geoméricamente una ecuación.
- Dadas las condiciones geométricas que debe reunir un conjunto de puntos que tenga coordenadas $(x;y)$, determinar una ecuación donde todos los pares de coordenadas $(x;y)$ la verifiquen. A esto se le llama interpretar algebraicamente una curva.
- Reconocer cada una de las cónicas, tanto por sus propiedades geométricas como por las analíticas. (Kozak et al., 2007, p. 164)

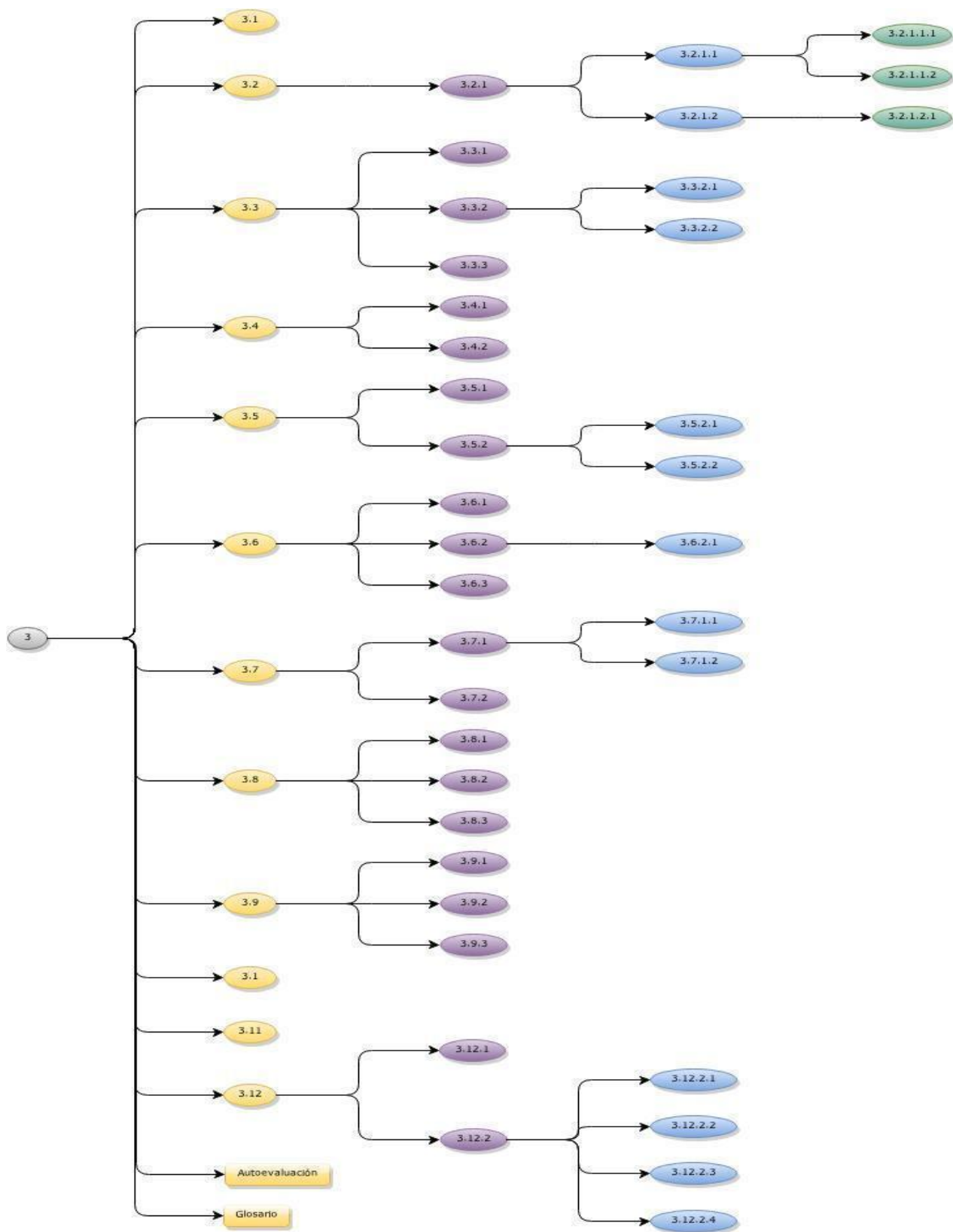


Fig. 1. Diagrama de árbol de la organización de los contenidos

Al plantear los objetivos del capítulo el autor revela sus intenciones, lo que pretende que logren los usuarios del texto con su lectura y con las actividades que la acompañen. Los dos primeros son objetivos referidos a aprender un procedimiento. Un procedimiento que lleva a hacer una interpretación. El tercero es un objetivo referido a aprender conceptos y conocer propiedades. Falta un objetivo referido a desarrollar una actitud o valorar alguna cuestión. Los objetivos señalados expresan más las capacidades que el estudiante debe asumir que lo que puede aplicar, construir o crear.

Las restantes secciones están dedicadas al desarrollo de los contenidos. La numeración de las secciones determina la secuenciación de los contenidos y, en el árbol, se corresponde con la ubicación de las ramas del primer nivel de la primera hasta la última. Si bien necesariamente unas secciones deben preceder a otras, algún cambio en el orden es posible sin que ocasione dificultad para la lectura o estudio del tema. Esto otorga cierta facilidad para acomodar la lectura a diferentes propuestas. De todos modos, así como quien trepa a un árbol sabe que para alcanzar una rama debe apoyarse en otra anterior, el lector del capítulo debe tener en cuenta que para leer una sección se requiere conocer alguna anterior.

Los contenidos aparecen en definiciones, demostraciones, figuras, ejemplos y ejercicios. Las palabras teorema, lema, proposición, procedimiento no se encuentran en el texto, sí la palabra regla, pero en sólo dos lugares. Esas palabras generalmente aparecen en los textos que enfatizan la estructura sistemática de la matemática y la deducción. En cambio, es la que consideramos, una presentación que no acumula enunciados y reglas para que los contenidos se distribuyan con continuidad. Está adaptada a la audiencia a la que se dirige, la lectura está facilitada por las figuras y requiere del lector manejo del lenguaje algebraico.

Una entre otras clasificaciones posibles, ha señalado tres tipos de contenidos diferentes: los contenidos verbales (lo que el alumno aprende a decir), los contenidos procedimentales (lo que el alumno aprende a hacer) y los contenidos actitudinales (las formas en que aprende a comportarse). (Pozo, 1999)

Las definiciones y otros contenidos conceptuales (verbales) están destacados en espacios rectangulares sombreados. Los contenidos procedimentales se muestran generalmente con los ejemplos y se da en los ejercicios la posibilidad de aplicarlos.

Los treinta ejemplos están ubicados en recuadros y se identifican como “Ejemplo n ” con $1 \leq n \leq 30$. Los 32 ejercicios se nombran como “Ejercicio 3- n ” con $1 \leq n \leq 32$. Las figuras, que ilustran los contenidos, se designan como “Figura 3- n ” con $1 \leq n \leq 87$. Si bien cada sección cuenta con ejemplos, ejercicios y figuras propios, la nomenclatura indicada, que los numera del primero al último, no acuerda con esa circunstancia.

El lenguaje matemático echa mano a varios modos de expresar un contenido. Así ocurre en el aula, en los libros, en los archivos magnéticos y en otros soportes. Para Janvier (1987) los principales modos de representación son cuatro: descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas. El capítulo utiliza de manera profusa tres de estos modos. No aparecen tablas, pero sí un cuadro que resume las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación de segundo grado incompleta represente una cónica.

LOS TEMAS IMPORTANTES

Para determinar la importancia relativa que el autor les da a los temas que trata nos apoyamos en la siguiente cita:

Autores como Gimeno (1995) o Apple (1989) indican que, en las investigaciones relacionadas con los libros de texto, es necesario analizar tanto la posición de las diferentes unidades como la cantidad de páginas dedicadas a cada una de las unidades. Según estos autores, esta información permite establecer la importancia que dan los autores o el grupo editorial a la unidad que se estudia. (Serradó Bayés y Azcaráte Goded, 2003, p. 70)

De acuerdo con esta indicación observamos en la tabla 1 que las secciones que ocupan un mayor número de páginas son: 3.6 Elipse, 3.7 Parábola, 3.8 Hipérbola y 3.12 Formas paramétricas de las cónicas. El autor, en su desarrollo, da mayor importancia a las cónicas propias, sus elementos y sus ecuaciones incluidas las paramétricas.

En sentido contrario, observamos que las secciones que ocupan menos páginas son: 3.1 Ingeniería y cónicas, 3.4 Superficie cónica y curvas cónicas, 3.10 Excentricidad y definición general de cónica y 3.11 Algunas propiedades de las cónicas y sus aplicaciones. El autor otorga menor importancia a las definiciones geométrica y general y a las aplicaciones.

La cantidad de páginas correlaciona positivamente con la cantidad de ejercicios y con la cantidad de ejemplos ($\text{corr}(\text{cantidad de páginas; cantidad de ejercicios}) = 0,60$ y $\text{corr}(\text{cantidad de páginas; cantidad de ejemplos}) = 0,74$), por lo que las cantidades de ejercicios y ejemplos también muestran la importancia que los autores asignan a cada sección. La tabla 1 también contiene esas cantidades.

Sección	Páginas	Ejercicios	Ejemplos
3.1	1,6	0	0
3.2	5,9	0	5
3.3	4,8	2	4
3.4	2,0	0	0
3.5	7,8	8	5
3.6	8,0	5	3
3.7	9,7	3	4
3.8	8,0	4	2
3.9	4,9	1	1
3.10	2,7	1	2
3.11	2,1	4	0
3.12	9,5	4	4
Autoevaluación	2,7	11	0
Glosario	1,6	0	0
Total	71,3	43	30

Tabla 1. Cantidad de páginas, ejercicios y ejemplos por sección.

LOS EJERCICIOS

El enunciado

Varios autores, entre otros Pano, Fridman, Rodil Martínez, Torre y Zion (2011), distinguen entre ejercicios y problemas. En consonancia con el autor del capítulo no haremos aquí esa distinción y utilizaremos el término ejercicios para ambos conceptos.

Según el relato del enunciado los ejercicios pueden ser: (a) de relato de una realidad, (b) de relato de tono realista, (c) de relato meramente matemático y (d) de relato de investigación matemática. Esta clasificación no es exhaustiva, pero contempla a los ejercicios que generalmente aparecen en los libros de texto de matemática. Definimos y ejemplificamos estos modos de relato como sigue:

a) Relato de una realidad

El enunciado invita al lector a actuar concretamente. Plantea la resolución de un problema real que requiere el manejo de conceptos y procedimientos matemáticos y la realización de actividades como medir, estimar, obtener información, diseñar, dibujar, modelar o decidir.

Ejemplo propio: En un sector de Facultad un pasillo separa, a un lado y al otro, las aulas. Se trata de construir en el piso de ese pasillo una cadena de elipses tangentes dos a dos y tangentes a las paredes. La parte del piso interior a las elipses llevará un embaldosado diferente al de la parte exterior. Hay que determinar la cantidad de elipses de la cadena, dibujarlas sobre el piso, calcular la mínima cantidad de baldosas de cada tipo a usar y el costo de realización del trabajo de embaldosado.

b) Relato de tono realista

El enunciado lleva al lector a aplicar los contenidos del texto a una situación concreta, descrita en lenguaje cotidiano. La resolución del ejercicio implica una traducción del enunciado al lenguaje formal de la matemática. Se trata de simular una cuestión con visos de realidad. En el enunciado se encuentran todos los datos necesarios para resolver el ejercicio.

Ejemplo: Ejercicio 3.26 de Kozak et al (2007)

Para construir la base circular de un tanque de forma cilíndrica, se replantean en el terreno tres puntos cuyas coordenadas, expresadas en metros con respecto a un sistema de referencia local, son A(5;3), B(6;2) y C(3;-1). Se pide:

- a) Determinar una ecuación de la circunferencia de la base y expresarla en la forma general de la ecuación de segundo grado.
- b) Si la altura del tanque es de 2,60 metros, ¿cuál es su volumen?
- c) Si en ese tanque se quieren colocar 34,12 toneladas de un fluido cuyo peso específico es de 1,08 kg/dm³, ¿cuál debería ser la altura mínima del tanque para recibir la totalidad de dicha carga?

(Kozak et al, 2007, pp. 219-220)

c) Relato meramente matemático

El enunciado hace referencia a objetos matemáticos como ejes coordenados, ecuación, parábola, tangente, lado recto u otros. La resolución del ejercicio requiere hacer cálculos y utilizar conceptos y procedimientos que el texto contiene como contenidos. La respuesta puede ser pedida en algún modo de representación pertinente.

Ejemplo: Ejercicio 3.20 de Kozak (2007) et al:

¿Para qué valores de t la recta $y = \frac{1}{3}x + t$ corta la hipérbola $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$? (Kozak et al, 2007, p. 210)

d) Relato de investigación matemática

El enunciado está relacionado con contenidos matemáticos de cierta complejidad y la resolución del ejercicio requiere desplegar estrategias que incluyen procesos como conjeturar, probar, demostrar, encontrar, representar, argumentar o mostrar un contraejemplo. Pretende del lector la realización de una actividad próxima a la propia de la matemática.

Ejemplo propio: Represente, en el sistema habitual de ejes coordenados, las cónicas, pero utilizando en su definición, como lugar geométrico, la distancia de Minkowski en lugar de la euclídea.

La Tabla 2 muestra la cantidad de ejercicios por modos de relato que contiene el capítulo.

Modos	Ejercicios
A	0
B	4
C	28
D	0

Tabla 2. Distribución de los modos de relato.

Conocemos dos posiciones con respecto a cómo ubicar la matemática en el contexto de la formación del ingeniero. Una considera que el estudiante tiene primero que aprender esta ciencia para luego tenerla como herramienta para abordar los estudios propios de la especialidad elegida. La otra considera que los contenidos matemáticos deben presentarse subordinados al problema ingenieril y que las prácticas propuestas deben acercar al alumno a las formas del ejercicio profesional. Sabemos también que estas posiciones no aparecen en estado puro tanto en las aulas como en los textos.

Apreciamos sobre la base de la distribución de los modos de relato de los ejercicios, representada con la Tabla 2, que el capítulo está más cerca de la primera posición que de la segunda. Los siete octavos de los ejercicios son de relato meramente matemático, el octavo restante corresponde a ejercicios de relato de tono realista, no hay ejercicios de relato de una realidad ni tampoco de relato de investigación matemática.

Las demandas cognitivas

Fernando Acero, en su Tesis Doctoral, nos comenta sobre la investigación QUASAR:

Una investigación que abarca un período de cinco años (1990-1995) en escuelas medias de Estados Unidos es (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning), conocida por la sigla QUASAR (Brändstrom 2005, Henningsen y Stein 1997, Stein y Smith Schwan 1998), establece una clasificación de las demandas cognitivas de los ejercicios según que su resolución exija: (a) memorización, (b) procedimientos desconectados de conceptos, (c) procedimientos conectados con conceptos, (d) el ejercicio efectivo de la matemática. Según QUASAR, los ejercicios que demandan memorización implican la reproducción de hechos, reglas o expresiones previamente aprendidas; los procedimientos inconexos son los que requieren de un algoritmo que se aplica sin ambigüedad y están orientados a producir una respuesta correcta; los procedimientos significativos requieren de alguna elección de procedimientos alternativos y reclaman su conexión con los conceptos o definiciones centrales; finalmente, el ejercicio efectivo de la matemática exige un pensamiento complejo no algorítmico para ser aplicado a una situación cuya resolución no está sugerida por el ejercicio o actividad propuesta, necesita de una regulación autónoma del estudiante en el control de los procedimientos y la satisfacción de las restricciones (Acero, 2014, p. 9).

Para clasificar los ejercicios del capítulo según el criterio QUASAR, uno de los autores de esta ponencia trabajó separadamente con otros dos siguiendo los criterios de Cruz Ampuero (2014). En cada trabajo se asignó la letra de una clase a cada ejercicio. En ambas oportunidades hubo coincidencia en la asignación. De estos trabajos resultó la tabla 3.

Clase	Ejercicios
A	0
B	16
C	15
D	1

Tabla 3. Distribución de las clases QUASAR

La Tabla 3 muestra que hay igual número de ejercicios de baja demanda cognitiva (clases A y B) y de alta demanda cognitiva (clases C y D). No encontramos ejercicios que para su resolución exijan sólo memorización. Algunos ejercicios del capítulo se resuelven con la aplicación de un algoritmo o la utilización de un procedimiento mostrado en un ejemplo. Otros necesitan de la combinación de recursos como la apelación a un gráfico, la aplicación de fórmulas previamente conocidas o encarar un procedimiento general con conexiones cercanas a ideas conceptuales subyacentes.

EL CAPÍTULO Y LAS CONCEPCIONES SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA MATEMÁTICA QUE LO SOSTIENEN

En un intento de atribuir las concepciones sobre el aprendizaje y sobre la matemática que el capítulo sugiere, nos inspiramos en las ideas que González Astudillo y Sierra Vázquez (2004) utilizan en su metodología de análisis de libros de texto. Estos autores clasifican los manuales en tres perfiles según la dominante entre tres modalidades: expositiva, tecnológica y comprensiva. Adoptamos estas modalidades con las modificaciones a sus significados que siguen:

Expositivos. Son textos con una visión de la matemática como acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados pero que poseen una estructura matemática, típicamente deductiva, en la que, partiendo de las definiciones de los conceptos, se deducen los teoremas y se exponen algunos pocos ejemplos. Enfatizan el significado matemático de los conceptos y la lógica de los procedimientos matemáticos. Sus contenidos son eminentemente conceptuales. El carácter formal de los contenidos presenta a la matemática como un cuerpo estático, impidiendo su uso en otros contextos y el desarrollo de la creatividad. Llevan a un aprendizaje de tipo memorístico y a fomentar la repetición de conceptos sin la debida comprensión. Están emparentados con la primera cara de la moneda matemática descrita up supra.

Tecnológicos. Son textos que conciben la matemática como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas y destrezas para pensar los conceptos y aplicarlos a diversas situaciones. Son concisos en las definiciones de los conceptos para luego exponer los procedimientos en

variados ejemplos. Ponen el énfasis en las reglas y los procedimientos, aunque los organizan, junto con los conceptos, en una forma lógica. Sus contenidos son principalmente procedimentales. Otorgan a la matemática un carácter práctico. Proponen una ejercitación abundante para afianzar los procedimientos expuestos. La aplicación repetitiva de las reglas y procedimientos favorece el aprendizaje memorístico y coloca al lector en un lugar de sujeto reproductor.

Comprensivos. Son textos que ven la matemática como un cuerpo de conocimientos apropiado para interpretar la realidad, entendida ésta en sentido amplio. La presentan como objetos de aprendizaje que, además de poseer significado, tienen la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes. Presentan actividades que, para realizarlas, requieren de la experimentación. El aprendizaje de la matemática se logra con la construcción de redes conceptuales que la conectan con otros conceptos partiendo de situaciones propias de la realidad. Subyace la concepción de un aprendizaje significativo relevante. Mantienen una relación de afinidad con la segunda cara de la moneda matemática.

Los contenidos del capítulo están organizados de una manera lógica razonablemente representada por un diagrama de árbol. Las ideas expuestas aparecen aplicadas en los ejemplos. Se nota un énfasis en el hacer procedimental dirigido al manejo algebraico, al cálculo numérico y a la representación gráfica. Formula una matemática práctica que utiliza en los desarrollos y ejemplos, y alcanza para resolver los numerosos ejercicios propuestos. Por ello ubicamos al capítulo entre los textos *Tecnológicos*.

CONCLUSIONES

En nuestra opinión, para las prácticas de enseñanza habituales hoy en las universidades argentinas, en particular la Universidad Tecnológica Nacional, donde nos desempeñamos, el capítulo analizado es un texto adecuado para ser leído por los alumnos que comienzan sus estudios de ingeniería y que deben encarar el tema Secciones Cónicas. Teniendo en cuenta la importancia que el autor le da a los temas y el relato del enunciado de los ejercicios concluimos que el profesor que lo adopte como material de estudio en su curso, deberá acentuar el carácter ingenieril de las secciones cónicas. Por lo anteriormente señalado categorizamos el texto como tecnológico. Observamos que el capítulo no hace mención de las tecnologías de información y de la comunicación y de las posibilidades que ofrecen para ayudar al aprendizaje de lo tratado. El autor no indica un software especializado que permita el manejo numérico, simbólico, gráfico y de simulación de la matemática involucrada. El contenido preponderante en los ejemplos y ejercicios propone, tareas a los lectores, en sintonía con las prácticas tradicionales de enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acero, F. (2014). *Libros de texto de matemática en carreras de ingeniería: Un análisis estructural*. Tesis doctoral. Repositorio Digital San Andrés. Recuperado el 7 de noviembre de 2017 de <http://repositorio.udes.edu.ar/jspui/handle/10908/2493>

Contreras, L. (1998). *Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. Recuperado el 22 de febrero de 2017 de <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2953>

Courant, R. y Robbins, H. (1979) *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

Cruz Ampuero, G. (2014). La Demanda Cognitiva como Oportunidad de Aprendizaje en el Área Matemática. https://docs.google.com/document/d/1zTvdClgBslqDwz9xPdGkR5eGt_ej0uX24xGj0WzLok0/edit.

Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665/document>. Recuperado el 22 de febrero de 2017.

Dubois, M. E. (2005). *El proceso de lectura: de la teoría a la práctica*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Gonzalez Astudillo, M. T.; Sierra Vázquez, M. (2004) Metodología de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas. Los Puntos Críticos en la Enseñanza Secundaria en España durante el Siglo XX. *Enseñanza de*

las Ciencias, V. 22 N. 3, p. 389-408. Recuperado el 7 de noviembre de 2017 de <https://ddd.uab.cat/record/1672>

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kozak, A. M.; Pastorelli S.; Vardanega, P. (2007) *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal*. McGraw-Hill Interamericana.

Kuntzmann, J. (1969) *¿A dónde va la matemática? Problemas de la enseñanza y la investigación futuras*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Litwin, E. (2008). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la educación superior*. Buenos Aires: Paidós.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (2), 265-280. Recuperado de <http://repositori.udl.cat/bitstream/handle/10459.1/31328/21935-21859-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y> el 16 de marzo de 2017.

Narro Ramirez, A. (1997). Investigación sobre la concepción de la Matemática en las ciencias sociales en la UAM – Xochimilco. *Política y Cultura*, nº 9, pp. 249 – 280. Universidad Autónoma Metropolitana, México. Recuperado de <http://www.redalyc.org/html/267/26700914/> el 7 de noviembre de 2017.

Pano, C. O.; Fridman, C.; Rodil Martínez, A.; Torre, V.; Zion, V. (2011). *Apuntes sobre innovación en educación universitaria*. Buenos Aires: Ediciones Rosel.

Pozo, J. (1999). Aprendizaje de contenidos y desarrollo de capacidades en la educación secundaria. En: Coll, C. (Coord.) *Psicología de la instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria*. Barcelona: Editorial Horsiri.

Serradó Bayés A.; Azcaráte Goded M. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática*, V.15, N. 1, pp. 67-98. Recuperado de <http://www.redalyc.org/html/405/40515104/> el 7 de noviembre de 2017.

Thompson, A. (1992). Teachers' belief and conceptions: A synthesis of research. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Vilar, J.; Gomez, F.; Tejero, M.; (1997). *Las siete nuevas herramientas para la mejora de la calidad*. Madrid: FCEditores.

Trabajo 5: Uso didáctico del error: una experiencia de aula.

Messina, V.; Seminara, S.; Gil, T.; Pano, C.

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
vrmessi@gmail.com, seminarasilvia@gmail.com, tgil@fibertel.com.ar, cpano@doc.frba.utn.edu.ar

Introducción

Uno de los obstáculos con los que se encuentra un estudiante para comprender un asunto matemático tiene que ver con la aparición de los que comúnmente se denominan errores. Éstos pueden ser desde la falta de una tilde necesaria sobre la letra de una palabra hasta un verdadero disparate, pasando por cálculos incorrectos y razonamientos lógicamente equivocados. Los alumnos comenten errores en los exámenes, en los escritos que producen o presentan, y en las respuestas a las preguntas que, como docentes, les hacemos. Pero no sólo los estudiantes cometen errores: los profesores no estamos exentos de hacerlo y también los libros de texto los contienen.

Desde el año 2013 llevamos a cabo un proyecto sobre Alfabetización Académica con alumnos de Álgebra y Geometría Analítica, asignatura del primer año de las carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.

Para realizar una actividad en el marco de ese trabajo, elegimos el capítulo sobre Secciones cónicas de un libro de texto (Kozak, Pastorelli, y Vardanega, 2007), con la intención de que los estudiantes lo leyeran, para luego realizar algunas las tareas de escritura. Al leerlo nosotros para preparar la actividad, descubrimos errores en una cantidad que nos llamó la atención; muchos de esos errores eran de tipeo, pero también algunos errores de cálculo, omisiones, etiquetas equivocadas en algunos gráficos, etc. Nos preguntamos qué hacer con esos errores, y cómo podrían incidir en la lectura comprensiva que debían hacer nuestros alumnos. Comenzamos entonces a indagar sobre los errores en libros de texto y nos encontramos con que son más frecuentes de lo que pensamos.

El tema tiene, incluso, transcendencia en los medios de comunicación...

Excélsior, el portal de noticias líder en México, publicó el 9 de agosto de 2013:

Los libros de texto que el próximo 19 de agosto recibirán los 26 millones de alumnos de preescolar, primaria y secundaria del país tienen imprecisiones que van desde errores ortográficos y *dedazos*, hasta instrucciones incorrectas.

Tal como lo señaló el pasado 30 de julio la subsecretaria de Educación Básica, Alba Martínez Olivé, los textos que son la base académica para las clases diarias de los niños y en los que se basan los maestros “tienen defectos”, porque no sólo hay palabras mal escritas, sino que también presentan errores de diversos tipos. (Hernández, L., 2013).

La edición en línea de La República, un conocido diario peruano, publicó el 12 de mayo del mismo año:

Denuncian errores en libros de matemática en colegios privados de nuestro país.

Según Panorama, libros elaborados por el Grupo Editorial Córdova tienen cuantiosos y groseros errores en sus textos escolares. Un reportaje de Panorama **denunció la calidad** de la serie de libros "**Mentemati**", del **Grupo Editorial Córdova**, para alumnos de todos los niveles de educación primaria. En estos libros se ha encontrado gran cantidad de **errores matemáticos y ortográficos** en casi **todas las páginas**. (Redacción LR, 2013; las negritas son del original).

También en el ámbito académico se ha estudiado e investigado el tema. En un artículo de Palop, Caballero García, Fernández Bravo y Cela (2013) se puede leer:

Analizando libros de texto de Matemáticas de 6º de Educación Primaria de las cuatro editoriales más utilizadas en la Comunidad de Madrid, encontramos lo siguiente. En la exposición de contenidos, vemos errores de concepto, descripciones ambiguas de algoritmos, contenidos en los que se han omitido condiciones de restricción y aparecen como generales... En los ejercicios resueltos, encontramos respuestas en las que el razonamiento que se lleva a cabo es contrario al razonamiento lógico, o bien que se pretende aplicar un concepto erróneo... Por último, en los ejercicios propuestos, vemos problemas mal definidos (Noda Herrera, 2000; Simon, 1973), que pueden ser interpretados de varios modos con distintas soluciones y en la guía didáctica aparece una única solución; o que carecen de los datos necesarios para ser resueltos y en la guía didáctica se utilizan dichos datos; o bien en los que aparecen símbolos matemáticos utilizados con un significado distinto del que la matemática dicta, o cuyo enunciado es absurdo o sin solución y en la guía didáctica aparece una solución... (Fernández Palop et al., 2013, p. 133).

Estos autores exponen ejemplos de errores encontrados, justifican en cada caso su condición de error y los ordenan según una serie de características.

Beyer (2014), en un extenso artículo acerca de los errores, malentendidos y obstáculos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, escribió:

Si examinamos los textos escolares de matemáticas es posible que nos encontremos muchas sorpresas. Una de ellas es hallar en muchos de ellos un buen número de errores, alguno de los cuales incluso son de tipo conceptual. Muchos más son los malentendidos; y mayor aún son las deficiencias didácticas presentes en una buena cantidad de textos en uso en las aulas venezolanas. (Beyer, 2014, p. 15)

Este autor muestra una serie de casos donde exhibe los errores y explica en qué consiste la equivocación. También presenta varias clasificaciones de los errores y expone algunas estrategias para enfrentarlos con los alumnos.

El error es intrínseco a toda producción humana y no puede soslayarse su presencia. En los procesos de enseñanza y aprendizaje docentes y alumnos convivimos con el error.

Desde una práctica educativa tradicional, que pretende dirigir sus acciones fundamentalmente hacia la obtención de resultados exitosos, el error es considerado como algo punible, que debe erradicarse; es un estorbo para alcanzar la meta cuando lo que importa es el resultado. De la Torre (2004) propone, sin embargo, una visión diferente:

Otra cosa es que veamos el aprendizaje, la formación, como un proceso en el que la característica principal sea la indeterminación. En este sentido, el error acompaña al proceso. Las intervenciones del profesor no pretenden allanar el camino de dificultades, ni evitar los errores, ni provocarlos, **sino utilizarlos cuando surgen** (de la Torre, 2004, p. 32; las negritas son nuestras).

Visto de este modo, y en lo que respecta a las producciones de los alumnos, el error adquiere las características de un “signo”, un “llamado de atención” que amerita una consideración más positiva, como revelador de dificultades y orientador a la hora de tomar decisiones sobre la introducción de cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La utilización didáctica del error como situación de aprendizaje está en sintonía con esta orientación, y son numerosos los trabajos de investigación sobre el uso positivo de estos errores. En particular, miembros de nuestro grupo de trabajo han realizado varias experiencias en este sentido (del Puerto et al., 2004, 2005, 2006).

Pero como hemos señalado, los errores no son patrimonio exclusivo de los estudiantes, los errores en los libros de texto parecen ser inevitables. Errores de todo tipo escapan a los correctores, en la vertiginosa carrera por publicar las obras que demanda un sistema educativo en permanente expansión. Los imperativos de productividad y competitividad han alcanzado también a la industria editorial. Este negocio no evadió la lógica ecuación “deducción de costos y aumento de la producción = mayores ganancias” y, como consecuencia, se debilitaron los controles de calidad editorial (Senz Bueno, 2005).

Ante esta realidad, varios autores (Whiting, 1991; Slisko, 1995; Campanario, 2001, 2003) han sugerido sacar provecho de estos errores utilizándolos como elementos de trabajo en el aula, para estimular el desarrollo de capacidades metacognitivas de control y

autoevaluación de la comprensión. Macías et al. (2007) pasan revista a algunos de estos trabajos. En términos más generales Briceño (2009), al referirse al uso didáctico del error, realiza una interesante síntesis:

Desde la perspectiva constructivista y cognitivista, el error es una importante fuente de aprendizaje en tanto sirva como catalizador de la duda, la autocrítica, la reflexión, el desequilibrio cognitivo y la toma de conciencia acerca de las contradicciones. Tanto el error como el fracaso son elementos concomitantes en el aprendizaje y la adquisición de nuevos conocimientos, puesto que un error visto más como un gestor de conocimiento u organizador didáctico reflexivo que como un elemento negativo sinónimo del fracaso, es un elemento positivo generador de nuevos aprendizajes” (Briceño, 2009, p. 22)

Detectar errores en un texto, e intentar remediarlos, puede resultar una tarea enriquecedora para el alumno ya que pone a prueba hasta qué punto ha comprendido los nuevos contenidos.

Nuestra experiencia

Atendiendo a este hecho, y en virtud de los errores detectados en el texto seleccionado sobre Secciones cónicas, decidimos diseñar una tarea para que los alumnos trabajaran tratando de detectarlos y corregirlos, luego de haber recibido clases tradicionales (expositivas) sobre los contenidos involucrados.

Seleccionamos dos párrafos del capítulo, divididos cada uno en dos secciones, con la consigna de que descubrieran y marcaran errores y reescribieran el texto correctamente.

La experiencia se llevó a cabo con un grupo de 36 alumnos de primer año de Ingeniería Química, agrupados por parejas, durante dos clases de Álgebra y Geometría Analítica, en el primer cuatrimestre de 2015.

En las Figuras 1 y 2 mostramos las dos consignas dadas a los alumnos (una por clase) y en las Figuras 3 y 4, algunas de las respuestas obtenidas.

La docente presente en el aula pudo observar cómo los alumnos discutían con entusiasmo para marcar los posibles errores, y revisaban en detalle los apuntes de clase, para corroborar si sus correcciones eran atinadas. La mayor parte de los errores fueron descubiertos por un alto porcentaje de las parejas; los estudiantes manifestaban muchas dudas antes de marcar cada error y les costaba menos rehacer correctamente los desarrollos. Ante la duda, varias parejas marcaron como errores cosas que eran correctas.

En el ejercicio incluido en la Figura 1 hay un error de intercalación de un “0” en un lugar que no corresponde y algunos errores tipográficos por ausencia del signo menos. Presumimos que serían detectados por todos los alumnos, ya que sólo requerían de una lectura atenta; sin embargo, un 25% de las parejas de alumnos no los advirtió, según creemos, porque la interpretación global del texto es posible aún con estos errores. Luego hay un error de cálculo, que es arrastrado a lo largo de todo el desarrollo posterior. Esto conduce a una errónea determinación de la posición del foco de la parábola y de la ecuación

de la recta directriz, y que se vuelca en el gráfico correspondiente; en este caso un 83% de las parejas descubrió los errores en el desarrollo y un 67% advirtió y corrigió el error en el gráfico.

Trabajo práctico: Ecuación de la parábola.

El siguiente desarrollo, extraído de un libro de texto de *Álgebra y Geometría Analítica*, contiene varios errores. Algunos son simples errores de tipeo, pero otros son errores de cálculo, que conducen a conclusiones equivocadas.

Les pedimos que lo revisen con detalle, descubran los errores, y reescriban el desarrollo de manera correcta, subrayando o resaltando en color las correcciones.

No olviden revisar también el gráfico. Pueden consultar los apuntes de clase o un libro de texto si lo desean.

Ejemplo 18

Determinar si la gráfica de la ecuación $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ representa una parábola con directriz paralela a algún eje. De ser así, determinar su foco, su vértice y su directriz.

Solución

Si es una de las parábolas buscada equivaldrá a $x - h = \frac{(y - k)^2}{4c}$ o a $y - k = \frac{(x - h)^2}{4c}$

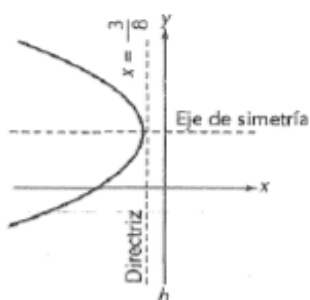
Reescribiendo $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 12y = -8x - 13 \Rightarrow 4(y^2 - 3y) = -8x - 13 \Rightarrow$

$$4\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -8x - 13 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4 \Rightarrow$$

$$4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Comparando $x - h = \frac{(y - k)^2}{4c}$ con $\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$ puede concluirse que la segunda

Figura 3-57



ecuación es un caso particular de la primera, donde

$$h = -\frac{1}{2}; \quad k = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 4c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{8}$$

Luego es una parábola con vértice en $V = (h; k) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, foco

$F = (h + c; k) = \left(-\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right)$, directriz $x = -\frac{3}{8}$, y eje de simetría $y = \frac{3}{2}$.

Se deja como ejercicio verificar, utilizando la definición de parábola con foco en $\left(-\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right)$ y directriz $x = -\frac{3}{8}$, que la ecuación es $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ (o una equivalente).

Figura 1

Trabajo Práctico: Ecuaciones de parábola e hipérbola.

Como vimos la clase pasada, en los libros a veces encontramos errores...
¿Puedes analizar las siguientes resoluciones, tomadas de un texto de la materia,
para ver si son correctas o contienen equivocaciones? En caso de encontrarlas,
te pedimos que las resaltes en color y las reescribas correctamente.
Pueden consultar los apuntes de clase o un libro de texto si lo desean.

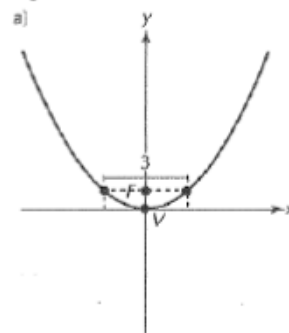
Ejemplo 21 a) Determinar una ecuación para la parábola del primer gráfico de la figura 3-61, dar su foco y su directriz.

Solución

a) La parábola tiene vértice en el origen y su eje focal es coincidente con el eje y . Luego la ecuación ordinaria es $y = \frac{x^2}{4c}$. A partir de la figura, su lado recto es 3 (o dos puntos de la parábola son $(\pm \frac{3}{2}; c)$) y $c > 0$ (la parábola abre hacia arriba).

Al utilizar estos datos resulta que $4c = 3$; $c = \frac{3}{4}$. Luego, una ecuación de la parábola es $y = \frac{x^2}{3}$ (o bien $3y = x^2$). Su foco es $F = (0; 0) = (\frac{3}{4}; 0)$, y su directriz $y = -c$; $y = -\frac{3}{4}$.

Figura 3-61



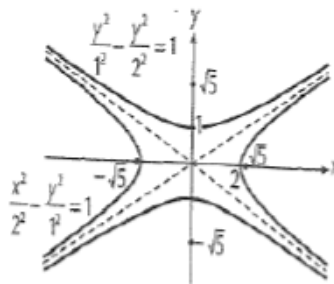
Ejemplo 26 Graficar las hipérbolas $4y^2 - x^2 + 4 = 0$ y $4y^2 - x^2 - 4 = 0$ y sus asíntotas. Determinar la hipérbola de mayor excentricidad.

Solución

Escritas en su forma canónica son $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ y $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$. Tienen asíntotas; $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$, $y = \pm 0.5x$ (son hipérbolas conjugadas).

La distancia del centro al foco (para ambas) es $c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Figura 3-75



La hipérbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 1.12$.

La hipérbola $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{1} = 2.24$.

Es la de mayor excentricidad.

En el caso de la elipse, la excentricidad será mayor cuanto más se acerque el foco al vértice homólogo. En las hipérbolas, cuanto más se aleje.

Figura 2

Por señalar sólo algunos ejemplos concretos, en la Figura 3 observamos la respuesta de la Pareja N° 15, que no advierte en la línea 5 la intercalación de un cero que no corresponde ni la ausencia de un signo menos, pero considera como erróneos los valores de h , c y la abscisa del vértice de la parábola, que son correctos.

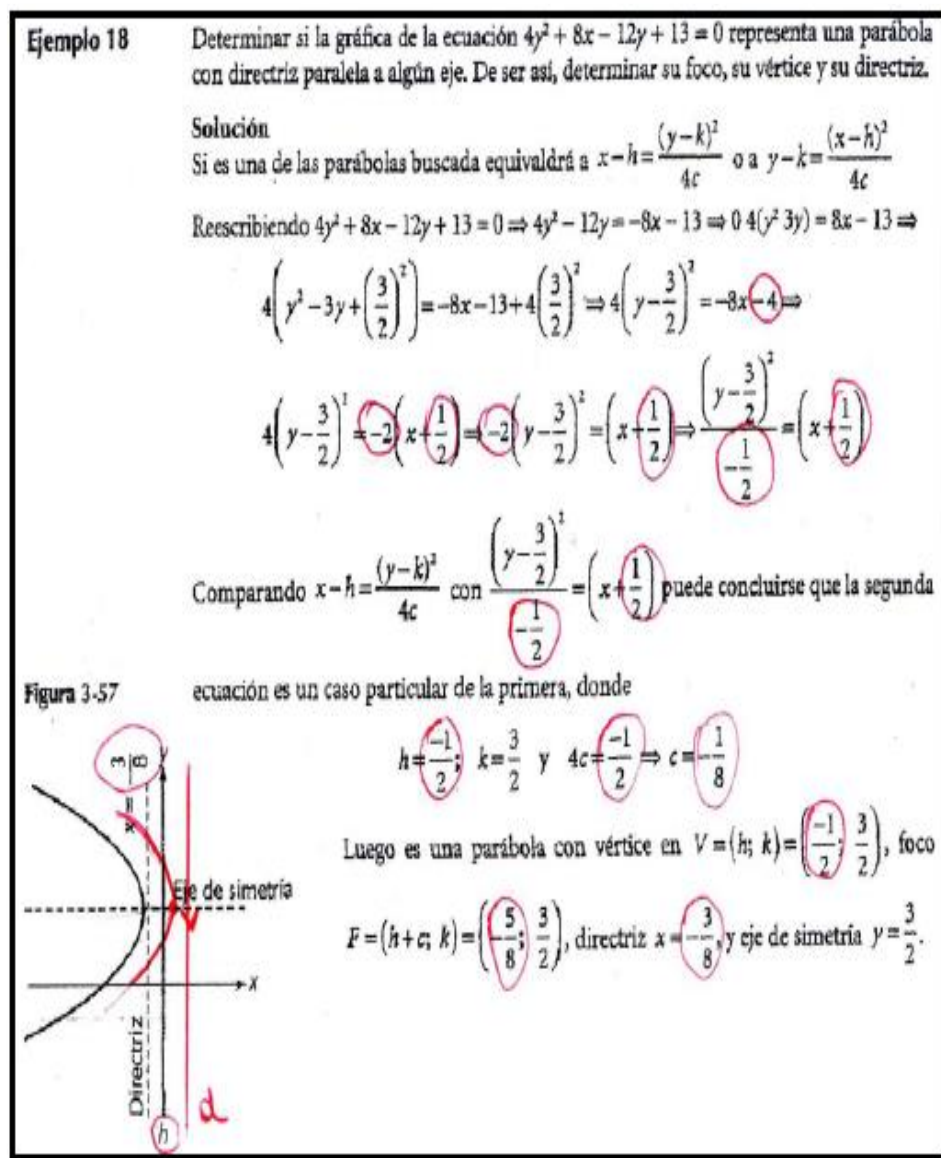
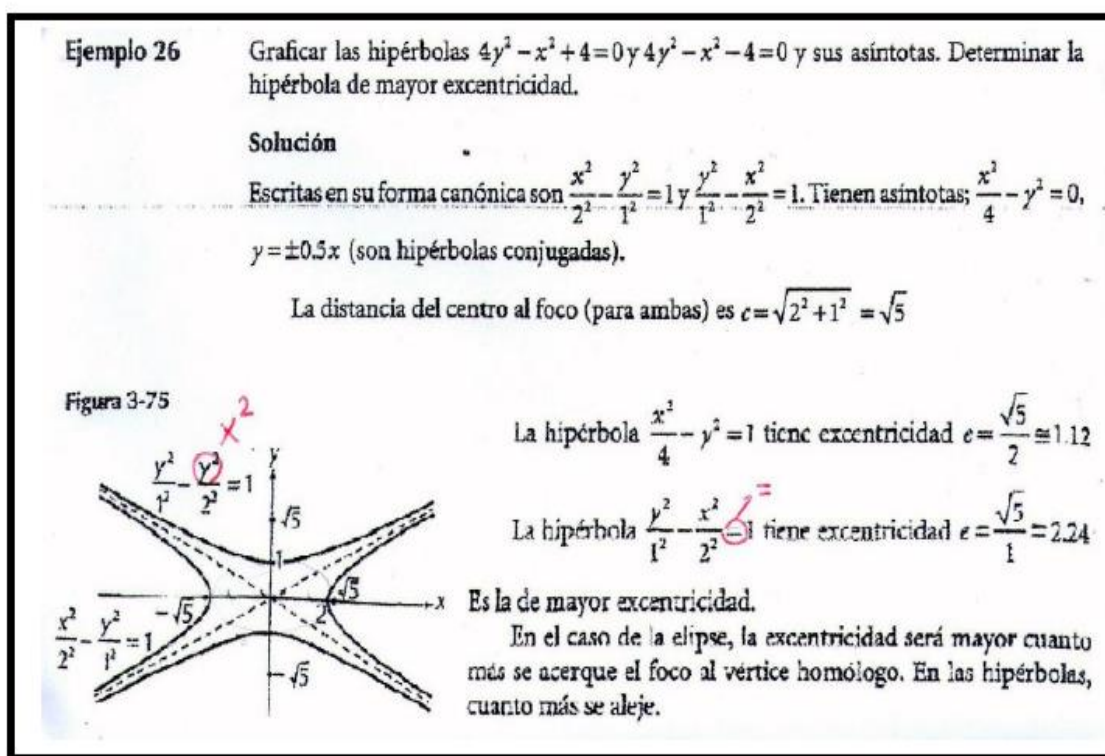


Figura 3

En el primer ejercicio de la Figura 2 se ubica erróneamente el foco de la parábola en el eje de abscisas (cuando lo correcto es en el eje de ordenadas); un 94% de las parejas de alumnos lo detectó. En el segundo ejercicio hay un error tipográfico en la ecuación de una de las hipérbolas del gráfico, que fue detectado por casi un 75% de los pares de alumnos, pero sólo un 17% advirtió que se afirma que $\frac{\sqrt{5}}{1} = 2.24$, en lugar de $\frac{\sqrt{5}}{1} \cong 2.24$. En este ejercicio, sin embargo, es llamativo que casi un tercio de las parejas corrigió errores inexistentes, como escribir “menor” en lugar de “mayor”, y “acerque” en lugar de “aleje”.

En la Figura 4 observamos el trabajo de la Pareja N° 5, que marca bien dos errores, pero omite corregir donde dice que el número irracional “raíz cuadrada de 5” es “igual” al número racional 2,24.



Reflexión sobre la experiencia

Los cambios vertiginosos que sufren los conocimientos técnicos, así como el enorme volumen de información disponible y su diversificación, exigen que el futuro ingeniero sea capaz de aprender por sí mismo, sea capaz de orientar y dirigir su auto-instrucción.

El aprendizaje autónomo, en el sentido que le otorga Hans Aebli, requiere de capacidades metacognitivas (Aebli, 2001, p. 157). Los alumnos tienen escasa oportunidad de ejercitar estas capacidades durante el cursado de sus asignaturas de grado, en las que el acento está puesto principalmente en los contenidos específicos. Por otra parte, es deseable que desarrollen esas capacidades mientras avanzan en su formación profesional; se trata de habilidades que tienen relación con el control de los propios procesos cognitivos, pero que también repercuten en las concepciones epistemológicas que los estudiantes tienen sobre el conocimiento científico. En efecto: que el alumno detecte errores o imprecisiones en un libro (que es considerado, en general, como una referencia incuestionable) repercutirá necesariamente en las concepciones que tiene sobre la validez de sus conocimientos y el rigor de las fuentes que se los proveen. Ejercitar esta habilidad de detección y análisis de errores en clase, a nuestro entender y el de otros autores ya citados, contribuye a desarrollar estrategias útiles. Campanario va más allá y asegura que es posible observar en los alumnos “una sensación (...) de mayor confianza en los propios conocimientos y una actitud más crítica hacia las deficiencias detectadas en los manuales universitarios” (Campanario, 2003, p. 163).

No hemos podido constatar aún esta actitud superadora que describe Campanario, pero sí podemos decir que los alumnos se abocaron con entusiasmo a una actividad que requirió poner en juego habilidades metacognitivas que, por lo general, tienen pocas oportunidades de ejercitar en el aula de matemática.

Los errores en el Capítulo

Como el eje de nuestro trabajo es la Alfabetización académica, nos interesa puntualizar algunos aspectos relativos a este campo.

Señalamos anteriormente que descubrimos los errores en el texto seleccionado cuando lo *leímos* para preparar la actividad para nuestros alumnos, y aquí destacamos la palabra “leímos” por la necesidad de situarnos en el concepto de lectura que guiara la nuestra, nos sirviera para el desarrollo de la actividad con los alumnos y nos ayudara a explicar la cantidad de errores encontrada

Distinguimos dos puntos de vista sobre la lectura, su comprensión y el sentido de lo que se lee. Por un lado, puede definirse la lectura como decodificación; desde aquí el sentido está en el texto y en las partes que lo componen, en sus palabras, oraciones o párrafos y la comprensión consiste en la extracción de ese sentido por parte del lector. Si éste no puede decodificar alguna de las partes no comprende el texto. Dos buenos decodificadores entenderán lo mismo si leen el mismo texto.

Por otro lado, encontramos un enfoque constructivo de la lectura. Solé sostiene que “leer es un proceso de interacción entre el lector y el texto, proceso mediante el cual el primero intenta satisfacer (obtener una información pertinente para) los objetivos que guían su lectura” (Solé, 2002, p. 19). Dentro de este mismo enfoque Dubois señala que “el sentido lo aporta el propio lector de acuerdo con los conocimientos y experiencias archivados en su memoria” (Dubois, 2007, p. 25). El lector es un sujeto activo que procesa y examina el texto con objetivos que lo guían y con conocimientos previos que pone en relación con lo que lee. Dos lectores con objetivos y saberes diferentes, pueden discrepar en el sentido que le otorguen al texto leído. Esto nos lleva a pensar que en realidad el sentido dado a un texto no es una réplica que el lector hace del significado que el autor quiso imprimirle, sino que es una construcción. En el caso de la lectura individual la construcción es propia del lector. La expresión latina *errare humanum est* significa literalmente *errar es humano*. El uso habitual de ella en latín parece que la pinta con el color de la verdad. Nosotros entendemos que como seres humanos podemos equivocarnos, está en nuestra naturaleza. Escribir es un acto humano, los textos que escribimos no están exentos de errores. Para descubrir los errores de un escrito debemos leerlo atenta y reflexivamente. Esto hicimos con el capítulo en cuestión.

La lectura académica es atenta y minuciosa, pone el foco en las palabras, símbolos y gráficos que contienen las páginas, y en sus relaciones para formar unidades superiores en significado de la disciplina. En un principio no busca la relación con otros temas o no se interesa por las aplicaciones. Importa cómo los elementos textuales operan entre sí para determinar el sentido del texto que permita su comprensión. Comprensión que a su vez resignifica a los primeros términos y facilita la comunicación.

La comprensión de un texto como el siguiente se logra si se conoce el significado de los términos que contiene y de la notación utilizada:

Si x_1 y x_2 son dos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial sobre el cuerpo R de los números reales y $k \in R$, $k \neq 0 \Rightarrow kx_1$ y kx_2 son vectores linealmente independientes.

Radford señala que "...ha habido una toma de conciencia colectiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica" (Radford, 2006, p. 7) y toma a ésta como una razón del interés suscitado por la semiótica en el campo de la educación matemática.

La comprensión de la proposición anterior referida a independencia lineal requiere del conocimiento del lenguaje matemático en sus distintos registros de representación semiótica. Es ésta una lectura cercana a la que se entiende como de decodificación.

Pero también la lectura académica es reflexiva. "Reflexionar sobre el texto quiere decir dialogar con uno mismo sobre la comunicación escrita, hacerse preguntas, plantearse dudas con respecto a la información que nos brinda el autor" (Dubois, 2007, p. 29). Incluye la búsqueda de ejemplos, contraejemplos y aplicaciones. Busca relacionar un concepto o procedimiento con otros conocidos. Trata de comparar el texto con lo leído en otro lugar o lo escuchado, si el lector es un alumno, en la clase. El lector rehace la demostración o los cálculos habidos e intenta formas alternativas. Es una lectura cercana al enfoque constructivo.

Leímos el capítulo, no con el profesionalismo de los correctores especializados porque no lo somos, pero sí hicimos una lectura académica como la descrita y encontramos los errores que figuran en el Anexo 1. Agrupamos los errores en cinco categorías.

- 1 Errores por omisión o falta de una condición o expresión simbólica necesaria para completar el sentido de una expresión, imponer una restricción o no distorsionar una definición. Por ejemplo, el error N° 8 del Anexo 1.
- 2 Errores tipográficos, que consisten en las sustituciones de algunos caracteres por otros y también en su ausencia donde debieran estar o en su presencia donde no debieran estar. Por ejemplo, el error N° 11 del Anexo 1.
- 3 Errores de cálculo numérico o algebraico como, por ejemplo, el error N° 31 del Anexo 1.
- 4 Errores por intercalación de palabras o expresiones matemáticas que no se corresponden con el desarrollo temático en curso. Por ejemplo, el error N° 58 del Anexo 1.
- 5 Errores por incorrecta correspondencia entre la representación gráfica y su enunciación textual. Por ejemplo, el error N° 63.

82% de los errores encontrados fue tipográfico, el 12% del tipo 1; se hallaron además 2 del tipo 3 y sólo 1 del tipo 4 y del tipo 5.

De cómo se evitan los errores en los libros de texto

El autor de un texto, por más experimentado que sea, puede incurrir en errores u omisiones en el escrito que entrega a la editorial. Cometer errores es, sin duda alguna, una de las acciones más habituales del ser humano. El editor es el responsable de someter el escrito a

corrección. Para eso suele apoyarse en correctores especializados que trabajan bajo su coordinación. “La corrección del texto que remite el autor es tarea fundamental, dado que toda editorial debe aspirar a la perfección de sus libros. Y perfección significa fallo cero. Jamás podemos resignarnos a convivir con las malditas erratas” (Pimentel, 2007, p. 90). Según este mismo autor, existen dos tipos de correcciones:

- La ortotipográfica, con la que se trata de enmendar las faltas de ortografía y el uso inadecuado de los signos tipográficos. El corrector detecta y elimina las faltas de ortografía; resuelve las fallas de acentuación y puntuación; revisa las posibles transposiciones u omisiones de caracteres, así como el uso apropiado y coherente de comillas, mayúsculas, cursivas, abreviaturas y, en el caso de textos matemáticos, de la notación típica.
- La de estilo, que es una corrección literaria que actúa sobre los planos sintáctico, gramatical y expresivo con el fin de pulir el texto y optimizar sus recursos. El corrector suprime los errores y las imprecisiones de vocabulario, elimina muletillas y vicios léxicos, combina correctamente las palabras y los grupos que estas forman para expresar significados, adapta el texto a la lengua propia de la comunidad de sus usuarios, cuidando siempre de proteger el estilo propio del autor.

Para el caso de los libros de texto de matemática, se debe agregar la corrección de contenidos: un especialista en la materia, revisa y corrige la rigurosidad en la presentación de los asuntos de la disciplina.

El texto es del autor, él tiene la libertad para aceptar o no las correcciones. Por eso es importante el trabajo coordinado entre autor y correctores para aclarar las dudas y resolver los desacuerdos.

Para finalizar

Nuestra actividad se desarrolla en la universidad.

Nos atrevemos a recomendar a nuestros colegas profesores que revisen los libros que recomiendan. Los lean académicamente, aprovechen los errores si los hay, creen con ellos situaciones de aprendizaje. Por ejemplo, proponer ejercicios con consignas como: “En la página x donde dice xxx debe decir... (complete lo que corresponde)”, “El desarrollo del ejemplo x tiene un error que conduce a un resultado incorrecto. Rehágalo para obtener el resultado correcto”, “En la página x hay dos errores, encuéntrelos y dé razones de su aparición”, “Señale los errores, si los hubiere, en el trabajo de un compañero y corríjalos”. Pongan atención y concentración en sus clases y escritos para evitar los errores. El trabajo sobre el error no sólo es para remediarlo: es un constructor de conocimientos y su aprovechamiento constituye una innovación didáctica.

A aquellos que con mucho esfuerzo asumen la tarea de escribir un libro, les proponemos que elijan un editor responsable, que someta sus originales a revisión por correctores especializados. A los que gustan escribir apuntes para subirlos a un sitio virtual o para que sean fotocopiados por sus alumnos, les sugerimos que los hagan revisar por una persona conocedora del tema. No estamos exentos de cometer errores. Somos humanos.

Y si, aún con todos los recaudos, los errores aparecieran, es posible hacer un uso didáctico de ellos, proponiendo a los alumnos tareas de detección, análisis y corrección que pueden contribuir al desarrollo de su capacidad de auto-instrucción.

Recordemos que el gran desafío que tenemos como profesores universitarios es, aunque no esté explicitado, formar profesionales autónomos, competentes, críticos, creativos, con aptitud para rectificarse cuando se equivocan, capaces de interpretar y producir cambios no sólo en los ámbitos de sus desempeños sino más allá, en un mundo que deseamos sea siempre mejor.

Referencias bibliográficas

- Aebli, H. (2001). *Factores de la enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo*. Madrid: Narcea Ediciones.
- Beyer K., W. O. (2014). Los textos escolares y el error en matemáticas. *Matua: Revista del Programa de Matemáticas I*, 1 (1), 1-25
- Briceño E., Milagros T. (2009). El uso del error en los ambientes de aprendizaje: una visión transdisciplinaria, *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*, 14, 9-28.
- Campanario, J. M. (2001). ¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como éste? Una relación de actividades poco convencionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 351-364.
- Campanario, J. M. (2003). De la necesidad, virtud: cómo aprovechar los errores y las imprecisiones de los libros de texto para enseñar física. *Enseñanza de las Ciencias*, (21) 1, 161 – 172.
- del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. 1º Parte. *Elementos de Matemática*, 19 (74), 5-18.
- del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2005). Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. 2º Parte. *Elementos de Matemática*, 19 (75), 17 – 32.
- del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, N° 38/4. Recuperado de www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf
- Dubois, M.E. (2006). Sobre lectura, escritura y algo más. En Carlino, P.(Ed.) *Textos en Contexto 7*. Buenos Aires: Lectura y Vida/Asociación Internacional de Lectura.
- Fernández Palop, P.; Caballero García, P.; Fernández Bravo, J. A. y Cela, C. J. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas? *Números*, 83, 131-158.

- Hernández, L. (2013, 9 de agosto). Errores en libros de texto: abundan dedazos, confunden colores y escriben “ocaciona” . *Excelsior*. Recuperado de <http://www.excelsior.com.mx/nacional/2013/08/09/912863>
- Kozak, A.M., Pastorelli, S. y Vardanega, P. (2007). *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal*. Buenos Aires: McGraw-Hill Interamericana.
- Macías, A.; Mazzitelli, C.; Maturano, C. (2007). Las estrategias metacognitivas y su relación con el contexto educativo. *Revista del Instituto de Investigaciones en Educación en las Ciencias Experimentales (IIECE)*. Recuperado de <http://www.feeye.uncu.edu.ar/web/posjornadasinve/area2/Aprendizaje%20-%20eleccion%20de%20carrera/009%20-%20Mazzitelli%20y%20Maturano%20-%20UN%20San%20Juan.pdf>
- Pérez Rodríguez, U.; Álvarez Lires, M. y Serrallé Marzoa, J. F. (2009). Los errores de los libros de texto de primer curso de ESO sobre la evolución histórica del conocimiento del universo. *Enseñanza de las Ciencias*, 27 (1), 109-120.
- Pimentel, M. (2007). Manual del Editor. *Cómo funciona la moderna industria editorial*. Córdoba: Berenice.
- Radford, L. (2006). Semiótica y educación matemática: introducción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Extra – 1), 7-22.
- Redacción LR (2013, 12 de mayo). Denuncian errores en libros de matemática en colegios privados de nuestro país. *La República*. Recuperado de <http://larepublica.pe/12-05-2013/denuncian-errores-en-libros-de-matematica-en-colegios-privados-de-nuestro-pais>
- Senz Bueno, S. (2005). En un lugar de la «Mancha»... Procesos de control de calidad del texto, libros de estilo y políticas editoriales. *Panace@*, 6 (21 – 22), 355 - 370.
- Slisko, J. (1995). The limitless world of textbook mistakes. *The Physics Teacher*, 33, 381
- Solé, I. (2002). *Estrategias de lectura*. Barcelona: Editorial Graó - ICE.
- Whiting, W. B. (1991). Errors: A Rich Source of Problems and Examples. *Chemical Engineering Education*, 25(3), 140-144.

ANEXO 1

Errores encontrados en el Capítulo 3 de Kozak et al. (2007):

Nº 8 Página 168, Ejemplo 4, línea 9.

Donde dice “ $\left(\neq y - \frac{1}{1+x^2} = 0\right)$ ” debe decir “ $\left(\neq y - \frac{1}{1+x^2} = 0, \forall y \neq 0\right)$ ”

Nº 11 Página 170, sección 3.3.1, línea 8.

Donde dice “ $y' = y - h$ ” debe decir “ $y' = y - k$ ”

Nº 31 Página 196, ejemplo 18 (11 errores)

Se transcribe resolución correcta del mismo, ya que presenta varios errores.

Determinar si la gráfica de la ecuación $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ representa una parábola con directriz paralela a algún eje. De ser así, determinar su foco, su vértice y su directriz.

Solución

Si es una de las parábolas buscada equivaldrá a $x - h = \frac{(y-k)^2}{4c}$ o a $y - k = \frac{(x-h)^2}{4c}$

Reescribiendo $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 12y = -8x - 13$

$\Rightarrow 4(y^2 - 3y) = -8x - 13$

$\Rightarrow 4 \left[y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] = -8x - 13 + 4 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 4 \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4 \Rightarrow$

$4 \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8 \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$

Comparando $x - h = \frac{(y-k)^2}{4c}$ con $\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$ puede concluirse que la segunda ecuación es un caso particular de la primera, donde $h = -\frac{1}{2}$; $k = \frac{3}{2}$ y $4c = -2 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

Luego es una parábola con vértice en $V = (h; k) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, foco $F = (h + c; k) = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$, directriz $x = 0$, y eje de simetría $y = \frac{3}{2}$.

Se deja como ejercicio verificar, utilizando la definición de parábola con foco en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ y directriz $x = 0$ que la ecuación es $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ (o una equivalente)

Nº 58 Página 217, ejemplo 25, línea 5.

Donde dice “semieje mayor $\sqrt{200}$ 10” debe decir “semieje mayor: $\sqrt{200}$ ”

Nº 58 Página 217, ejemplo 25, línea 7.

Donde dice “semieje mayor” debe decir “semieje mayor: $\sqrt{169}$ ”

Nº 63 Página 196, sección 3.7.2, ejemplo 18 figura 3-57:

Donde dice “ $x = \frac{3}{8}$ ” debe decir “ $x = -\frac{3}{8}$ ”.

Nota: El lector interesado puede solicitar la lista completa de los errores del capítulo a cualquiera de los autores del artículo.

Términos y conceptos significativos en el tema secciones cónicas, en el lenguaje de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad Regional Buenos Aires, de la Universidad Tecnológica Nacional

Este trabajo buscó indagar respecto a los términos, que los docentes de la Cátedra de Álgebra y Geometría Analítica, consideran más importantes en el discurso disciplinar de la asignatura. Para este propósito se les envió a los colegas de la asignatura una breve nota en la que se los invitaba a responder a la pregunta respecto a que términos y conceptos ellos consideraban importantes en un tema de Geometría Analítica, específicamente: Secciones Cónicas.

La nota enviada es la siguiente:

Estimado Profesor

Soy docente de Álgebra y Geometría Analítica y estoy trabajando en mi tesis de maestría sobre alfabetización académica y el aprendizaje del álgebra lineal. Para ello necesito de su colaboración. Le pido, si es posible, que me envíe una lista de las palabras, que, a su criterio, son significativas en el tratamiento del tema Cónicas. Se trata de las palabras que aluden a los conceptos fundamentales o designan a los objetos matemáticos involucrados en el tema.

Desde ya muchas gracias. Reciba mi cordial saludo, Vicente Messina.

El resultado de la encuesta a los docentes consultados indicó que los términos más significativos son:

- Foco
- Centro
- Vertice
- Excentricidad

Somos conscientes que las palabras: Término, concepto, objeto matemático deben estar enmarcadas en una concepción de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo con Duval (1999) la conceptualización requiere el pasaje a través de registros representativos, por lo que quizás, sea más preciso hablar de objeto matemático. Son los objetos matemáticos los que se adquieren por medio de:

- Semiótica: actividad de formación de representaciones a través de los signos,
- Noética: adquisición conceptual de un objeto,
- Registro semiótico o signo con el que se configura a la representación,
- Representación semiótica a la forma en la que queda expresado el objeto,

considerando que, si se cambia el registro semiótico, cambia la representación, mientras que lo recíproco no necesariamente debe cumplirse.

Siguiendo a Duval, el alumno comienza a tomar contacto con la representación semiótica, de acuerdo al registro seleccionado del objeto matemático en estudio por el docente, pero, no lo hace con el objeto mismo. La selección y el diseño de actividades que el docente despliega, crea las condiciones para que el alumno ponga en funcionamiento una serie acciones cognitivas. Estas son: la representación en un determinado registro semiótico y el tratamiento de esa representación que le permite crear una nueva, siempre en el marco del mismo registro semiótico. Esta transformación de representaciones se realiza en un marco socio-cultural sobre los cuales se construye el conocimiento.

La búsqueda de términos u objetos matemáticos dio como resultado el Trabajo 6. En este trabajo proponemos a la polisemia de los términos hallados como acceso por parte de los alumnos al lenguaje específico de la disciplina.

Trabajo 6: Palabras cónicas

Vicente Messina, Valeria Torre, Carlos Pano

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional

vmessina@arnet.com.ar, valeriatorre30@hotmail.com, cpano@doc.frba.utn.edu.ar

Resumen

Este trabajo se origina en una encuesta hecha a profesores para averiguar sobre las palabras que son significativas en el tratamiento del tema Secciones cónicas. En él exponemos brevemente sobre el concepto de polisemia, destacando la noción esquemática asociada, y lo relacionamos con el aprendizaje. Analizamos las palabras centro, excentricidad, vértice y foco en lo que hace a su cualidad de polisémicas para encontrar, en cada una, el punto que determina la multiplicidad de significados que tiene. Por último, indicamos la conveniencia de destacar la polisemia en la enseñanza.

Palabras clave: Polisemia, Aprendizaje, Cónicas

Abstract

This paper is originated from a survey made to professors. The one was made to find out significant words in the treatment of conics' sections. We briefly expose the polysemy concept. Highlighting the associate schematic notion and relating it with learning. The words 'center', 'eccentricity', 'vertex' and 'focus' are analysed. The purpose is to find the point that determines the multiplicity of meanings that each one has. Finally, we indicate the convenience to highlight polysemy in teaching.

Key words: Polysemy, Learning, Conics

Introducción

Para una experiencia de alfabetización académica, realizada en un entorno virtual de aprendizaje, sobre el tema Secciones Cónicas, con estudiantes de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica

Nacional, encuestamos a profesores de la materia. Queríamos saber que palabras consideraban significativas para el tratamiento del tópico, a los efectos de tenerlas especialmente en cuenta en el desarrollo de la experiencia. Las palabras que fueron mencionadas por el mayor número de los encuestados fueron: centro, excentricidad, vértice y foco. En este trabajo analizamos la relación que tiene el significado específico que tienen esas palabras en el tema tratado con otros posiblemente conocidos por los estudiantes y la contribución al aprendizaje que esa relación puede aportar. Otros aspectos de la experiencia pueden leerse en Messina, Cittadini, Pustilnik, Sara, y Pano (2016), Messina, Cittadini, y Pano (2017), Messina, Gil, y Pano (2017), Messina, Revelli, Pustilnik, y Pano (en prensa), Messina, Seminara, Gil, y Pano (2017).

El aprendizaje es construcción del conocimiento. El conocimiento se construye a partir, entre otras cosas, de los conocimientos previos. El estudiante que estudia cónicas ya conoce las palabras que designan a sus elementos. Existe algo intrínseco en la palabra misma que la convierte en más intuitiva, natural y casi innata en el educando para aproximarle al nuevo conocimiento desde su propia individualidad. Interesa entonces facilitar su aprendizaje y enriquecer su vocabulario incorporando los significados conocidos de las palabras al tratamiento de los nuevos.

Polisemia y aprendizaje

Las palabras polisémicas son las que cuentan con más de un significado. El término polisemia fue acuñado por el lingüista francés Bréal. Él escribió:

“A medida que se le da a una palabra un nuevo significado, pareciera que se multiplica y se producen ejemplares nuevos de la misma apariencia en la forma, pero de diferente valor. Nosotros, a este fenómeno de multiplicación lo llamaremos polisemia” (Bréal, 1897. La traducción es nuestra).

No es de interés aquí abordar los variados enfoques con que los lingüistas tratan el concepto de polisemia ni su evolución en el tiempo, pero sí destacar que para considerar como polisémica a una palabra se debe percibir una relación entre sus diferentes significados.

“En los estudios de lingüística cognitiva, el interés está en describir la polisemia desde nuevos puntos de vista. De acuerdo con esta disciplina, la polisemia es más que una manifestación semántica, que contiene diferentes grados de representatividad, dichas representaciones no se encuentran aisladas, sino que, al contrario, están interrelacionadas por algún elemento en común” (Cuenca, 2013:126).

A ese elemento en común lo nombraremos noción esquemática. Es una noción general y abarcadora. La consideramos el antecedente que tiene como consecuentes a las diferentes representaciones. El gráfico de la figura 1 muestra el juego entre la noción esquemática y las representaciones, y entre estas últimas. Las líneas llenas indican que las representaciones se derivan de la noción esquemática y las líneas de guiones que las representaciones están vinculadas.

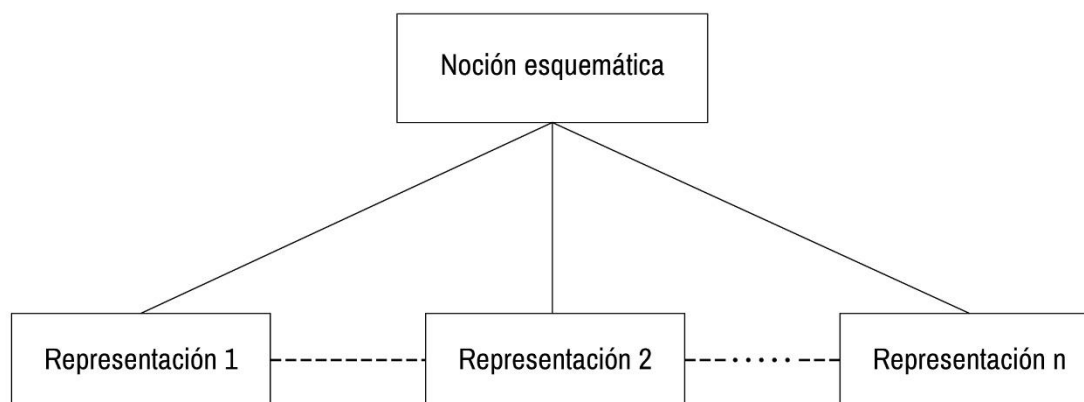


Figura 1. Polisemia: noción esquemática y representaciones.

Estas dos oraciones valen como ejemplo: “El gallo de cresta erizada era valiente y presumido” y “El surfista pudo colocar su cabeza debajo de la cresta de la ola”. En la primera, la cresta se refiere a la carnosidad roja que tiene sobre la cabeza el gallo y en la segunda, a la cima espumosa de la ola. Son dos representaciones que se desprenden de la noción “parte más alta de un cuerpo”

Para las teorías constructivistas, aprender comprensivamente, implica un proceso de interacción y cambio; el nuevo saber, en este caso lo que el profesor debe enseñar, se incorpora a los saberes previos del aprendiz generando una modificación o reestructuración de lo sabido y de lo nuevo. Se produce así el aprendizaje significativo.

A partir de los aportes de Ausubel, Juan Antonio García Madruga enseña que todos los alumnos pueden aprender significativamente un contenido si poseen en su estructura cognitiva conceptos relevantes que pueden funcionar como *inclusores*; dichos conceptos pueden ser activados para lograr la adecuada integración de la nueva información en la estructura de conocimiento ya existente. Esos *inclusores* son conceptos de mayor generalidad que permiten tender *puentes cognitivos* entre el contenido que se conoce y el que se trata de aprender (García Madruga, 1992). Desde esta perspectiva, las palabras polisémicas y en particular la noción esquemática, pueden pensarse como organizadores previos que generan los *puentes cognitivos* entre el sentido que el sujeto le atribuye a esa noción desde su experiencia vital y educativa anterior y el sentido disciplinar académico que se intenta enseñar.

Esos sistemas de ayudas o *andamiajes* (Bruner, 1988) deben ser claros, comprensibles y precisos, ya que son la guía y el sostén para la actividad estructurante, entendida como el proceso que realiza el aprendiz para otorgar significado al nuevo conocimiento. Así, y gracias a estas ayudas, el sistema cognitivo reconoce afinidad entre la novedad y lo que se sabía y por ende se produce la comprensión y un aprendizaje profundo y duradero, transferible a otras situaciones.

Nombres de elementos de las cónicas

Centro

Por lo menos desde la época de sus estudios primarios el estudiante conoce el centro de la circunferencia. El *centro de la circunferencia* es el punto del plano que la contiene, del que equidistan todos los puntos *de esa curva*. También sabe que para un punto dado de la circunferencia hay otro en la curva que está a la misma distancia del centro que el dado. Por esto, todo punto de la circunferencia tiene un simétrico en la circunferencia. El segmento determinado por estos dos puntos es un diámetro de la circunferencia. La intersección de todos los diámetros es el centro de la circunferencia y punto medio de todos ellos. Luego ese punto es el centro de simetría de la circunferencia. La noción de simetría central permite dar una definición general de centro de una cónica o de cualquier curva. Si una curva es simétrica respecto de un punto, ese punto es el centro de la curva.

El astroide exhibido en la figura 2 es una curva con centro

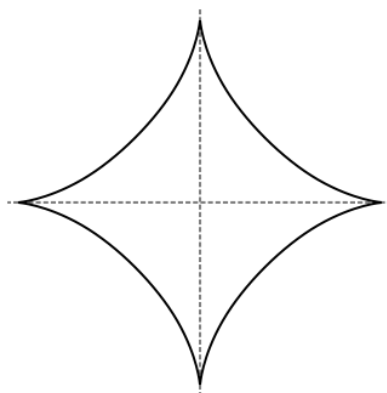


Figura 2. Astroide

También tienen centro las curvas definidas por las siguientes ecuaciones. Es fácil probar que el centro es el origen de coordenadas.

$$x^2 + y^2 = a(x^2 - y^2)$$

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

$$x^2y + aby - a^2x = 0$$

Quiera el lector dibujar estas curvas.

La representación de la palabra centro es diferente en las siguientes oraciones.

El centro de la circunferencia es el lugar en el que se apoya la punta del compás para trazar esta curva.

El intendente inauguró el centro comercial del oeste que quedó a la vera de la autopista.

El centro de la ciudad es el lugar concurrido por los habitantes o visitantes en el cual hay intensa actividad cultural, comercial o burocrática.

El centro de estudiantes dio inicio a una campaña para la instalación de un comedor en la facultad.

El centro de gravedad de un cuerpo es el punto sobre el que actúa la resultante de las fuerzas de atracción de la gravedad.

En el partido de fútbol de ayer el jugador más joven pateó un centro que habilitó la jugada que terminó en gol.

Con motivo de su casamiento la novia recibió de sus compañeros de trabajo un centro de mesa de fino cristal

El centro de una cónica es el lugar geométrico del punto medio de cualquier diámetro.

Estas distintas representaciones responden a la noción esquemática “lugar, estar en medio o en un medio”. Así podemos decir que el centro de una cónica es un punto (un lugar en el plano) que está en medio de la curva.

Excentricidad

Excentricidad, en las cónicas, es una palabra vinculada con el centro. En la elipse es el cociente entre la distancia del centro a un foco y la distancia del centro a un vértice situado en el eje focal.

Como definición de diccionario se tiene “Excentricidad: calidad de excéntrico, lo que se le atribuye a lo excéntrico”

Lo geoméricamente excéntrico es lo que está fuera del centro o que tiene un centro diferente

Una pieza excéntrica es la que gira alrededor de un punto que no es su centro de figura.

Una persona excéntrica es una persona extravagante. Así usa la palabra Leopoldo Alas en su cuento “Las Dos Cajas”, como se aprecia en el párrafo siguiente.

Otras veces el violinista miraba a su hijo, que al pie de la plataforma iba y venía, ora procurando coger una pierna de su padre, para lo que metía su mano de muñeca entre los balaustres, ora saltando alrededor del piano, como si fuera mariposa, y la música luz que le atraía. Para seguir los movimientos del niño el padre vigilante necesitaba hacer mil contorsiones, sin dejar de tocar con aquella suavidad y elegancia exquisita de siempre: daba vueltas en redondo; se inclinaba, se ponía sobre las puntas de los pies... parecía un músico *excéntrico* que lucía su habilidad entre piruetas. (Alas, 2007)

Las distintas representaciones de excéntrico que aparecen en los párrafos anteriores quedan abarcadas con la noción esquemática *lo excéntrico es lo raro, lo que se hace o dice fuera del orden o común modo de obrar*. ¿Qué tienen de extravagantes o raras las cónicas? Si el común orden de obrar al intersecar el cono circular recto con un plano es hacerlo con uno perpendicular a su eje, resulta que la circunferencia es el orden. Entonces, la excentricidad de una sección cónica indica su grado de desviación con respecto a la circunferencia. La figura 3 lo ilustra

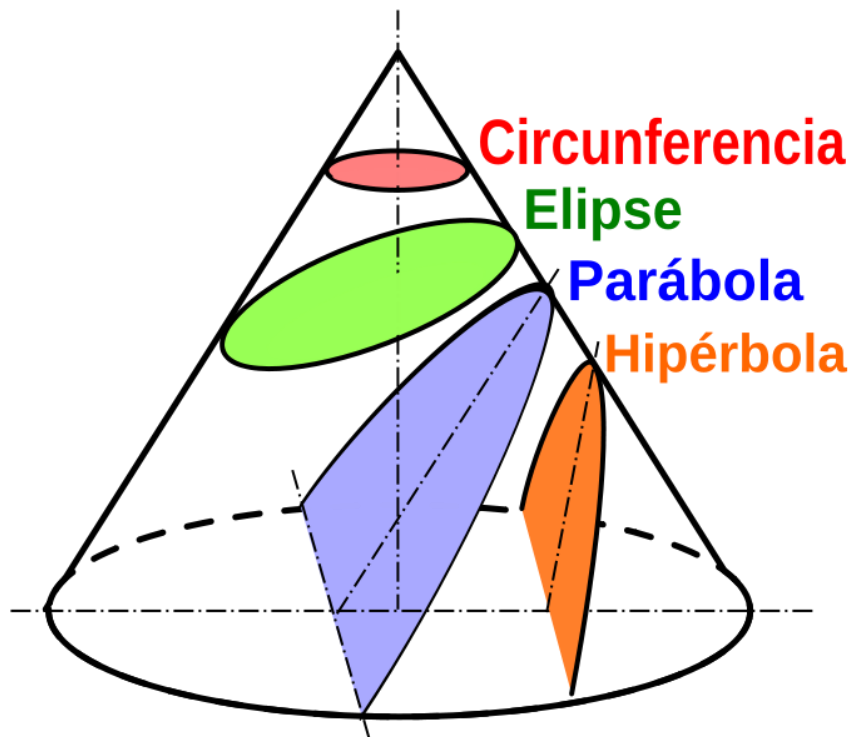


Figura 3. Excentricidad y ángulo entre el plano secante y el eje del cono.

La excentricidad crece con el decrecimiento del ángulo β que forma el plano secante con el eje del cono. Si se identifica mediante α al ángulo que forma una generatriz con el eje del cono (ángulo de conicidad) y con e a la excentricidad, se tiene:

Una circunferencia si $\beta = \frac{\pi}{2}$. La excentricidad de una circunferencia es $e = 0$.

Una elipse si $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. La excentricidad de una elipse es $0 < e < 1$.

Una parábola si $\beta = \alpha$. La excentricidad de una parábola es $e = 1$.

Una hipérbola si $0 \leq \beta < \alpha$. La excentricidad de una hipérbola es $e > 1$.

Vértice

El estudiante que aborda el estudio de las secciones cónicas conoce la palabra vértice. Sabe que el vértice de un ángulo es el punto en que concurren los dos lados del ángulo. Pero encuentra que las cónicas también tienen vértices, aunque no ángulos como los que conoce. Si se le acerca la definición de vértice de una curva (los vértices son los puntos de máxima o mínima curvatura) queda por mostrar que esta definición abarca al vértice de un ángulo.

En el gráfico se puede ver a la circunferencia $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ $c = \sqrt{2} r$ encajada en el gráfico de la función $f(x) = |x|$. Esta circunstancia permite considerar la función $f_r(x)$ cuyo gráfico aparece en la figura 4 en línea llena.

$$f_r(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}r \\ \sqrt{r^2 - x^2} & \text{si } -\frac{\sqrt{2}}{2}r \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}r \\ x & \text{si } x > \frac{\sqrt{2}}{2}r \end{cases}$$

Esta función depende del radio r de la circunferencia. O sea que se tiene una familia de funciones que dependen de r y que converge puntualmente a $f(x) = |x|$ cuando $r \rightarrow 0$.

La curvatura en el punto P , como en cualquier otro de la circunferencia, es

$\kappa = \frac{1}{r}$, $\kappa \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 0$. En el límite P es el vértice del ángulo gráfico de $f(x) = |x|$. Podemos establecer que en ese vértice la curvatura es $\kappa = \infty$ y es máxima ya que en los lados la curvatura es cero como se sabe. Queda establecido que, en este caso, que el llamado vértice del ángulo es un vértice en el sentido de la definición general. Para cualquier otro ángulo basta reemplazar la función $f(x) = |x|$ por la función $f_a(x) = |ax|$ y proceder con un razonamiento similar.

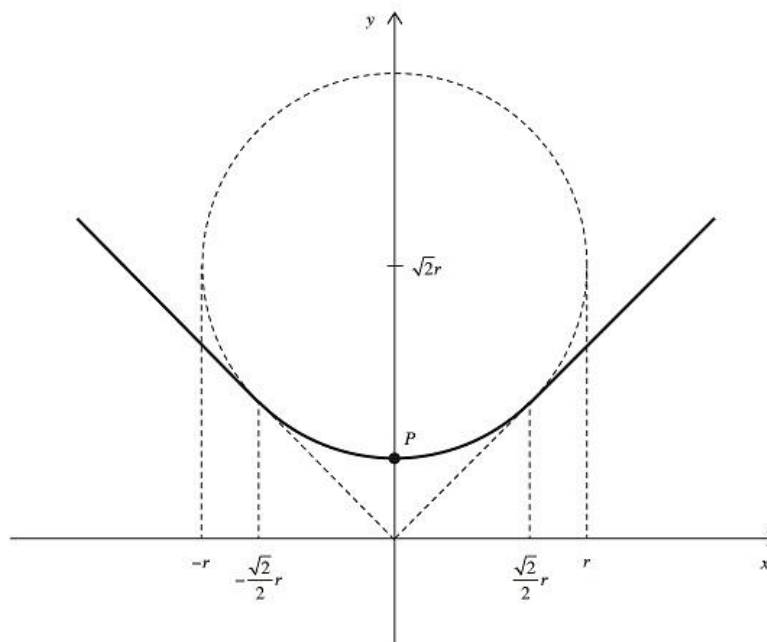


Figura 4. Gráfico de la función $f_r(x)$.

En anatomía el vértice es la parte más elevada de la cabeza humana. En la teoría de grafos a algunos de los elementos del grafo se los denomina vértices. En topografía se llama vértice a la cima de la montaña, a su parte culminante. Práxedes G. Guerrero (1882-1910) poeta, escritor, periodista y, militante y combatiente del anarquismo mexicano, le pone así una condición de elevación al vértice del poder: “Nos hemos sentido al borde de un abismo, el

de los odios de los poderosos, y hemos echado pie adelante sin un temblor en el corazón porque sabemos que el **vértice** es una cima cuando lo aborda la verdad”.

El vértice no siempre se parece a la punta de un pincho, pero si es un punto destacado o elevado por su posición, intensidad o importancia. Tomamos “punto destacado o elevado por su posición, intensidad o importancia” como noción esquemática.

Foco

La noción general de foco se puede expresar de esta manera: Foco es el lugar real o imaginario en que está como reconcentrado algo con toda su fuerza y eficacia, y desde el cual se propaga o ejerce influencia. Tomamos a ésta como noción esquemática. La palabra foco admite varios usos o sea tiene diferentes representaciones. Así lo ilustran los Oxford Living Dictionaries,

la región se convirtió en foco permanente de problemas y conflictividad; el foco cultural se asentaba en los monasterios; el chamanismo tiene como foco de irradiación Asia central; la costa caribeña es conocida como uno de los focos turísticos más importantes del mundo; el fuego sofocado ayer se inició con un solo foco a tres kilómetros de un cortafuego y con el viento de levante a favor (Español - Oxford Living Dictionaries)

La palabra foco aparece en salud pública cuando se usa el concepto de foco de infección. Este foco permite designar al núcleo bien delimitado desde el cual se irradia una infección. Cuando hablamos de iluminación designamos con la palabra foco aquella lámpara eléctrica que emite una luz muy fuerte y que se la dirige hacia una dirección determinada.

Como se estudia en Física, en un espejo cóncavo («verbigracia, uno parabólico») todo rayo que incide paralelo al eje óptico se refleja pasando por el foco. Por el principio de reversibilidad, todo rayo que incide pasando por el foco se refleja paralelo al eje óptico. Así, si se colocara un emisor en el foco, los rayos emitidos se reflejarían paralelos al eje. Si el polo es el foco y el eje polar es el eje principal de una sección cónica, la ecuación polar de la cónica es

$$\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$$

en la que e es la excentricidad y p la distancia de la directriz al foco.

Desde el foco se genera la cónica. Por cada valor que le asignamos a θ el radio vector ρ señala un punto de la cónica. O sea, la cónica se irradia desde el foco.

Para finalizar

Hemos planteado que la polisemia de las palabras que expresan conceptos de una disciplina puede utilizarse a favor del aprendizaje y lo hemos fundamentado con las teorías constructivistas de las que se ocupa la psicología educacional. Pero también, en el caso de la matemática, la polisemia permite *tender puentes* entre el mundo arquetípico de esta disciplina y el mundo real. Aparece así un uso en la enseñanza, la polisemia puede aportar

ejemplos y acercar aplicaciones como en los casos de la pieza excéntrica y el espejo parabólico antes mencionados.

Bibliografía

Bréal, M. (1897). *Essai de sémantique (Science des significations)*, París: Hachette.

Bruner, J (1988). *Desarrollo cognitivo y Educación*. Madrid, España, Morata.

Cuenca, M. J. y Hilferty, J. (2013): *Introducción a la lingüística cognitiva*. Barcelona: Ariel Letras, pág. 125-149.

Español - Oxford Living Dictionaries.

Recuperado de <https://es.oxforddictionaries.com/definicion/foco>

García Madruga, J.A. (1992). Aprendizaje por descubrimiento frente aprendizaje por recepción: la teoría del aprendizaje verbal significativo. En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (eds). *Desarrollo psicológico y educación*. Vol II, Madrid: Alianza Psicología.

Messina, V., Cittadini, G., Pustilnik, I., Sara, A. y Pano, C. (2016). Análisis de una actividad de comprensión lectora sobre un texto de álgebra con alumnos de la carrera de ingeniería. *Revista Premisa*, de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM), n°71, pp. 34-69. <http://www.soarem.org.ar/>

Messina, V., Cittadini, G. y Pano, C. (2017). La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica. *Revista Perspectivas Metodológicas*, N° 19, Vol. II, pp. 135-149. Departamento de Humanidades y Arte de la Universidad Nacional de Lanús.

Messina, V., Gil, T. y Pano, C. (2017). La comparación del desempeño de dos grupos de estudiantes en la resolución de un problema para evaluar una actividad de alfabetización académica. *Actas del XX Encuentro Nacional y XII Internacional Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero, 17, 18 y 19 de mayo de 2017. http://emci2017.unse.edu.ar/?page_id=29

Messina, V., Revelli, M., Pustilnik, I. y Pano, C. (en prensa). Las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje que subyacen en un capítulo sobre secciones cónicas. *Revista Premisa*, de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM). Aceptado para su publicación el 12 de noviembre de 2017.

Messina, V., Seminara, S. Gil, T. y Pano, C. (2017). Uso didáctico del error: una experiencia de aula. *Revista de Educación Matemática* de la FAMAf- Universidad Nacional de Córdoba. Enviado para su publicación.

4.3. Conclusiones

Las conclusiones que surgen de lo realizado

Los trabajos presentados los he realizado como miembro de un proyecto de investigación (Pano et. al., 2013), a lo largo de tres años de intensa labor. Con posterioridad a su escritura realicé una lectura que me permitió revalorizar su importancia. De cada uno de ellos se extraen conclusiones. Esto es lo que puedo agregar

Trabajos 1 al 6

Trabajo 1: Los resultados indican que hubo una buena Comprensión Lectora Académica en un entorno de aprendizaje autónomo, basado en el aula virtual. Esto me permite concluir que, si se prepara a los alumnos en lectura académica, pueden aprender a partir de la lectura de un texto y dar cuenta de ello.

Trabajo 2: El trabajo narra una actividad de escritura académica. Las tareas de matemáticas solicitadas a los alumnos requirieron, para evaluar sus escritos como tales, definir de antemano los aspectos de la escritura a tener en cuenta.

El trabajo mostró que es posible hacer una evaluación innovadora. En este caso se practicó una evaluación de a dos.

El cálculo de los coeficientes de correlación permitió concluir que a medida que avanza el entrenamiento en escritura académica, el rendimiento de los alumnos en los trabajos prácticos mejora.

Resultó interesante utilizar el concepto de entropía para detectar en que aspectos de la escritura académica se concentran las fallas en que incurren los alumnos.

Trabajo 3: Los miembros del equipo de investigación que integro sostenemos la hipótesis de investigación:

El aprendizaje del álgebra lineal mejora con intervenciones docentes que incorporan tareas de alfabetización académica

Al no poder rechazar estadísticamente la hipótesis nula, no contamos con un argumento estadístico a favor de nuestra hipótesis. A pesar de ello concluimos que habremos de seguir en el intento de encontrar pruebas en apoyo de nuestro supuesto, y animamos a quienes lean esta tesis que así lo hagan.

Trabajo 4: Cuando un docente recomienda un texto de estudio debe considerar las concepciones del autor y el grado de acuerdo que tiene con esas concepciones. Esto permitirá indicar al estudiante sobre los cuidados que debe tener al momento de su lectura. En nuestro caso, para hacer observables estas categorías, es que se realizó un análisis del capítulo desde varios enfoques en forma global utilizando un diagrama de árbol. Tener una representación gráfica de las partes del capítulo y su estructura, permitió inferir algunas de

las concepciones del autor. También las categorías: cantidad de páginas y posición de las secciones, nos permitieron analizar la importancia relativa que el autor le da a los temas. De la misma forma la dimensión *modo de relato* del enunciado de un ejercicio o un problema nos permitió observar en cuál de los modos hace hincapié el autor.

Trabajo 5: En este trabajo presentamos como algo contrario a lo esperado, los errores en un texto, puede convertirse en una oportunidad para el aprendizaje y la enseñanza. Hacer que el alumno dude sobre lo escrito en un texto genera una actitud crítica, no sólo frente al texto, sino también al discurso del docente. De forma que esta actitud, creo, debiera generar una postura metacognitiva que favorezca la adquisición de nuevos conceptos.

Trabajo 6: Esta actividad nos permitió conocer cuáles son los términos, conceptos u objetos matemáticos que los profesores de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad Regional Buenos Aires, consideran significativos en un tema de Geometría Analítica y planteó el debate, en el seno del grupo de investigación, respecto a que nos referimos cuando hablamos de términos, conceptos u objetos matemáticos. Además, la inclusión en el aula del tratamiento de la polisemia de estos términos importa es un aporte positivo a la enseñanza y el aprendizaje.

Recomendaciones:

Con base en los resultados de los trabajos presento a continuación algunas recomendaciones. Pienso que pueden ser útiles para investigaciones futuras

Trabajos 1 al 6

Trabajo 1: Para dar más fuerza convincente a la conclusión obtenida recomiendo replicar el estudio con el mismo texto o con otro. Es conveniente hacer un análisis previo que siga, entre otras, estas pautas (Khine, 2013):

- La estructura es clara y transparente
- El contenido es consistente con los objetivos de aprendizaje
- Sigue algún marco teórico de enseñanza y aprendizaje
- Se observa la concepción de matemática que tiene el autor
- El contenido es correcto
- Se conecta con otros temas de la matemática y de otras disciplinas
- La presentación de los temas es didácticamente adecuada
- El texto es lingüísticamente adecuado y apropiado
- Contiene elementos motivacionales
- Se compromete con un aprendizaje activo
- Tiene actividades de diferentes niveles cognitivos

Para la implementación de la réplica sugiero utilizar las actividades que permite la plataforma *Moodle*: Cuestionarios con distintos tipos de preguntas, Diario, Glosario, Tareas, (Sánchez Rojo, 2010). También se deberá usar con atención la evaluación pluripersonal.

Trabajo 2: Para elaborar trabajos prácticos, destinados a la realización de una experiencia como la que presento en este trabajo, recomiendo incluir situaciones problemáticas de interés. También hacer énfasis en los problemas, con enunciados que respondan al modo de Relato de una realidad. Los trabajos prácticos deberán estar elaborados de acuerdo a lo indicado en Messina et al. (2017).

Para llevar a cabo la corrección de los trabajos prácticos, con una modalidad similar a la empleada en mi investigación, recomiendo contar con docentes compenetrados con los propósitos, metodologías, recursos técnicos y fines de la evaluación pluripersonal.

Trabajo 3: Al replicar este trabajo será conveniente diseñar una situación problemática cuyo enunciado esté en modo de relato de una realidad. Su implementación será semejante a la desarrollada, la metodología de evaluación seguirá la misma secuencia y de forma pluripersonal.

Trabajo 4: A partir de este trabajo considero que un texto de estudio debe tener, entre otras características, una organización lógica que facilite su lectura y que el autor presente con mayor importancia los temas centrales que los de detalles. Sería importante que el autor proponga ejercicios cuyos enunciados transiten por las distintas clases de procesos cognitivos (Doyle, 1981).

Un texto dirigido a estudiantes de ingeniería debería hacer énfasis en el carácter ingenieril de los ejemplos, ejercicios y problemas. Además, considero importante, estimular desde el texto, el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación).

Trabajo 5: Las recomendaciones para este trabajo están desarrolladas en el párrafo “Para finalizar...” p. 95 del artículo presentado. Con ellas me quedo.

Trabajo 6: Implementar una actividad de escritura académica que ponga de manifiesto la apropiación que hacen los estudiantes de estos conceptos. La idea que subyace en esta actividad es: aquellos alumnos que utilicen estos conceptos en sus escritos de manera semántica, argumentativa y coherentemente correcta serán los que han obtenido una mejor comprensión del tema. Recomiendo el uso de diccionarios normativos y específicos de la matemática y otros. Ellos ayudan a profundizar en el tratamiento de las palabras polisémicas en las clases.

Bibliografía

- Abate, M.S. y Badenes, A. (2001). Una experiencia referida a la comprensión lectora en actividades de ingreso. *Actas de la Jornada sobre la lectura y la escritura como prácticas académicas universitarias*. (pp. 69-74). Universidad Nacional de Lujan. Recuperado el 01 de noviembre de 2001 de <http://www.unlu.edu.ar/~redecom/capitulo 2>.
- Acero, F. (2013). *Libros de texto de matemática en carreras de ingeniería. Un análisis estructural*. Tesis Doctoral. Escuela de Educación. Buenos Aires: Universidad de San Andrés
- Álvarez Méndez, J.M. (2003). *La evaluación a examen. Ensayos críticos*. Buenos Aires: Miño y Dávila.
- Álvarez Polo, Y. (2013). *Introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la segunda mitad del s. XIX y la primera del s. XX*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas y Computación. Logroño: Universidad de la Rioja. Recuperado el 05 de diciembre de 2016 de <https://documat.unirioja.es/descarga/tesis/40340.pdf>
- Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1997). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Mexico: Trillas.
- Bartolini-Bussi, M. (2005). The meaning of conics: Historical and Didactical Dimensions. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, y P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39-60). New York: Springer Science.
- Baserman, C., Little, J., Bethel, L., Chavkin, T., Fouquette, D., and Garufis, J. (2005). *Reference Guide to Writing Across the Curriculum*. West Lafayette, Indiana: Parlor Press.
- Baserman, C., (2008). *Handbook of research on writing. History, Society, School, Individual, Text*. New York: Taylor & Francis Group, LLC
- Baserman, C., (2010). *The Informed Writer. Using Sources in the Disciplines*. Fort Collins, Colorado: The WAC Clearinghouse. http://wac.colostate.edu/books/bazerman_wac/wac.pdf. Recuperado el 01 de junio de 2014.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Biggs, J. B. y Tang, C. (2011). *Teaching for Quality Learning at University. What the Student Does*. London: Open University Press- McGraw-Hill Education.

- Buendia Eisman, L., Colás Bravo, P. y Hernández Pina, F. (1998). *Métodos de Investigación en Psicopedagogía*. McGraw-Hill/Interamericana de España.
- Carr, W., Kemmis, S. (1986). *Becoming Critical. Education, Knowledge and Action Research*. London: Routledge Farmer
- Carlino, P. (2002a). Enseñar a escribir en la universidad: ¿Cómo lo hacen en Estados Unidos y por qué? Recuperado de <https://sites.google.com/site/giceolem2010/universidad>, el 01 de marzo de 2013.
- Carlino, P. (2002b). Enseñar a planificar y a revisar los textos académicos: haciendo lugar en el curriculum a la función epistémica de la escritura. Recuperado el 01 de marzo de 2013 de <https://sites.google.com/site/giceolem2010/universidad>.
- Carlino, P. (2002c). ¿Quién debe ocuparse de enseñar a leer y escribir en la universidad? Tutorías, simulacros de examen y síntesis de clases en las humanidades. Recuperado el 01 de marzo de 2013 de <https://sites.google.com/site/giceolem2010/universidad>.
- Carlino, P. (2003a). Alfabetización académica: un cambio necesario, algunas alternativas posibles. Recuperado el 01 de mayo de 2014 de <https://sites.google.com/site/giceolem2010/universidad>.
- Carlino, P. (2003b). Leer textos científicos y académicos en la educación superior. Obstáculos y bienvenidas a una cultura nueva. Recuperado el 01 de junio de 2014 de <https://sites.google.com/site/giceolem2010/universidad>.
- Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la Alfabetización Académica*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica de Argentina.
- Carlino, P. (2006). Concepciones y formas de enseñar escritura académica. Un estudio contrastivo. *Signo&seña*, n° 16, pp. 71-117. Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires.
- Carlino, P. (2007) ¿Qué nos dicen las investigaciones internacionales sobre escritura en la universidad? Recuperado el 01 de junio de 2014 de <https://sites.google.com/site/giceolem2010/universidad>.
- Carlino, P. (2009). Reading writing in the Social Sciences in Argentine universities. En C. Baserman, K. Robert, S. Null, P. Rogers, y A. Stansell (Eds.), *Traditions of Writing Research*. Oxford, Inglaterra: Routledge / Taylor and Francis.
- Carlino, P. (2010). Estudiar, escribir y aprender en universidades australianas. Recuperado el 01 de marzo de 2015 de <https://sites.google.com/site/giceolem2010/universidad>.
- Carlino, P. (2013). Alfabetización académica diez años después. Recuperado el 01 de marzo de 2015 de <https://sites.google.com/site/giceolem2010/universidad>.

- Chalmers, D. y Fuller, R. (1996). *Teaching for Learning at University*. London: Kogan Page.
- Cartolari, M. (2014). *Leer y escribir en asignaturas disciplinares de la formación docente en Historia: usos y sentidos de la lectura y la escritura desde el punto de vista de los alumnos y de los profesores* (Tesis de Doctorado). Programa Interuniversitario Universidad Nacional de Tres de Febrero y Universidad Nacional de Lanús, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.
- Carlson, D., Johnson, C., Lay, D. y Duane Porter, A. (1993). Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematical Journal*, Vol. 24, No 1.
- Colás Bravo, P. y Buendía Eisman, L. (1994). *Investigación Educativa*. Sevilla: Alfar.
- Darling-Hammond, L. (2014). *Next generation assessment. Moving beyond the bubble test to support 21st century learning*. San Francisco: John Wiley and Sons.
- Declaración Mundial sobre Educación Superior en el siglo XXI: visión y acción (1998)
Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001163/116345s.pdf> , el 03 de agosto de 2017.
- Díaz Barriga, A. (1994). *Una polémica en relación al examen*. Revista Iberoamericana de Educación. Número 5. Calidad de la Educación. Disponible en: <http://www.rieoei.org/oeivirt/rie05a05.htm>
- Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and its Applications*: 432 (2010) 2141-2159. Recuperado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379509004728?via%3Dihub>
- Dorier, J., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85-124). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Douady, R., (1984). Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dan tout le cursus primaire. Université Paris VII. These de Doctorat D'état. Recuperado de <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665> el 5 de junio de 2016.
- Doyle, W. (1981). La investigación sobre el contexto del aula: hacia un conocimiento básico para la práctica y política de formación del profesorado. *Revista de Educación*, 277, pp. 29-42. Madrid: MEC. Recuperado el 07/04/2016 de <http://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre277/re2770200503.pdf?documentId=0901e72b813c3054>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. CINVESTAV. I:P.N. Departamento de Matemática Educativa

- Fernandez Gallardo, P.F. (2006). *El secreto de Google y el Álgebra Lineal*. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid. Recuperado de <https://sctmates.webs.ull.es/modulo1lp/8/pfernandez.pdf> el 11 de noviembre de 2017.
- Galtung, J. (1966). *Teoría y métodos de la investigación social*. Buenos Aires: EUDEBA.
- Gipps, C. y Stobart, G. (2003). Alternative Evaluation. En T. Kellaghan y D. Stufflebean (Eds.), *International Handbook of Educational Evaluation* (pp.549-573). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hernandez Sampieri, R., Fernandez Collado, C., Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Ibáñez Brambila, B. (1995). *Manual para la elaboración de tesis*. México: Trillas.
- Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hilldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Khine, M. S. (2013). *Critical Analysis of Science Textbooks. Evaluating instructional effectiveness*. Dordrecht: Springer.
- Litwin, E. (2008). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la enseñanza superior*. Buenos Aires: Paidós.
- Lucarelli, E. (2003). *El eje teoría práctica en cátedras universitarias innovadoras su incidencia dinamizadora en la estructura didáctica curricular*. (Tesis doctoral). Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires.
- Mateo, J. (2006). Claves de un nuevo marco conceptual para la medición y evaluación educativas. *Revista de Investigación Educativa*, vol. 24, n° 1, pp. 165-186. Murcia: España. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=283321886009> el 01 de marzo de 2015.
- Mateo, J. y Olmo, F.M. (2008). *La evaluación alternativa de los aprendizajes*. Barcelona: Ediciones Octaedro.
- Matteucci, N. (2008). *Para argumentar mejor: lectura comprensiva y producción escrita: estrategias de comprensión y elaboración de argumentos*. Buenos Aires: Novedades Educativas.
- Medici, H. J., y Cabrera, E. S. (1960). *Geometría del plano y del espacio*. Buenos Aires: Librería del Colegio.
- McGinley, W. (1992). The Role of Reading and Writing While Composing from Sources. *Reading Research Quarterly*, Vol. 27, No. 3, pp. 226-248. Wiley on behalf of the International Literacy Association. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/747793>, el 22 de noviembre de 2016.

- McKernan, J. (2008). *Investigación-acción y curriculum. Métodos y recursos para profesionales reflexivos*. Madrid: Ediciones Morata.
- Messina, V., Cittadini, G., y Pano, C. (2017). La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica. *Perspectivas Metodológicas*. N° 19, Vol. 1, Universidad Nacional de Lanús.
- Moreira, M.C. (2007). Aprendizaje Significativo: de la visión clásica a la visión crítica. *Actas del I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*, pp. 37-53. Tandil: Unicen. (Traducción: María Rita Otero, Conicet-Niecyt, Unicen, Tandil, Argentina)
- Otte, M. (1993). Towards a social Theory of Mathematical Knowledge. *Learning from computers: Mathematics Education and Technology*, pp. 280-299, Berlin: Springer-Verlag
- Pano, C, Picón Janeiro, J. y Attorresi, H. (2008). Las dificultades para escribir en los estudiantes universitarios: Un abordaje desde el concepto de alfabetización académica. Proyecto UBACyT P027. Facultad de Psicología, Universidad de Buenos Aires.
- Pano, C., Cittadini, G., Pustilnik, I., Sara, A. y Messina, V. (2013). *Alfabetización académica en entornos virtuales de aprendizaje y evaluación innovadora con función pedagógica*. Proyecto con asiento en Universidad Tecnológica Nacional Regional Buenos Aires, reconocido por el código 25/C138 en el ámbito del Programa de Incentivos a los Docentes Investigadores.
- Pimentel, M.(2007). *Manual del editor. Cómo funciona la moderna industria editorial*. Berenice: Córdoba (España).
- Porlán, R., García, J.E., Cañal, P. (1997). *Constructivismo y Enseñanza de las Ciencias*. Sevilla: Diada Editora S.L.
- Pozo, J. (1999). Aprendizaje de contenidos y desarrollo de capacidades en la educación secundaria. En C. Coll, (Coord.), *Psicología de instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria* (pp. 45-68). Barcelona: Editorial Horsiri.
- Rashed, R. (2015). *Classical Mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes*. New York: Routledge.
- Reinozo, M. y Benavidez, Z. (2011). La lectura: Herramientas para la alfabetización académica de los estudiantes de ingeniería. *Educere*. Vol. 15, N° 51, pp. 369-378. Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela. Recuperado el 24 de septiembre de 2017 de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35621559007>
- Romer, P.M. (1986). Increasing Returns and Long-Run Growth. *En Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5, pp. 1002-1037. The University of Chicago Press. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/1833190>, el 01 de abril de 2013.

- Rosas, R. y Sebastián, C. (2013). *Piaget, Vygotsky y Maturana. Constructivismo a tres voces*. Buenos Aires: AIQUE.
- Rosenblatt, L.M. (2002). *La literatura como exploración*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- Ruíz Zúñiga, A., (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. Costa Rica: Editorial Universitaria Estatal a Distancia (EUNED).
- Russell, D., (1990). Writing across the Curriculum in Historical Perspective: Toward a Social Interpretation. *National Council of Teachers of English Stable*. Vol. 52, No. 1, pp. 52-73. <http://www.jstor.org/stable/377412>. Recuperado el 28 de Julio de 2017.
- Salinas Ibáñez, J. (2008). *Innovación educativa y uso de las TIC*. Sevilla: Universidad Internacional de Andalucía.
- Salinas Quiroz, F., Morales Carmona, F., Cruz Martinez, L.M., Posada, G. y Carbonell, A.(2014) Aproximación psicométrica al uso de los Q-Sorts en contextos de educación inicial. *Acta de Investigación Psicológica*, 4(2), 1596-1611. Recuperado el 14 de enero de 2017 de <http://www.elsevier.es>
- Samaja, J. A. (2005). *Epistemología y metodología: elementos para una teoría de la investigación científica*. Buenos Aires: Eudeba.
- Samaja, J.A. (2006a). Apuntes de Cátedra: *Procesamiento y análisis de datos*. Maestría en Metodología de la Investigación Científica. Universidad Nacional de Lanús. Mayo de 2006.
- Samaja, J.A. (2006b). Apuntes de Cátedra: *Metodología de la investigación*. Maestría en Metodología de la Investigación Científica. Universidad Nacional de Lanús. Noviembre de 2006.
- Sánchez Rojo, I. (2010). *Plataforma educativa Moodle. Administración y Gestión*. Madrid: RA-MA.
- Serradó Bayés, A. y Azcárate, Goded, M. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática*, vol. 15, n° 67, pp. 67-98. México: Grupo Santillana. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40515104.pdf> el 11 de agosto de 2017
- Sierpiska, A., Defence, A., Khatcherian, T. y Saldanha, L. (1997). A propos de trois modes de raisonnement en algebra linéaire. En J. Dorier (Ed.), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, pp.248-268. Grenoble: La Pensée Sauvage editions.
- Solé, I. (2002). *Estrategias de lectura*. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Barcelona: Grao.
- Steanhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del curriculum*. Madrid: Ediciones Morata.

- Sverdlick, I. (2012). *¿Qué hay de nuevo en evaluación educativa? Políticas y prácticas en la evaluación de docentes y alumnos. Propuestas y experiencias de autoevaluación*. Noveduc: Buenos Aires.
- Talavan, R. (2007). René Descartes. En A. Ramón (Ed), *Grandes Pensadores*. España: Planeta DeAgostini.
- Thaiss, C., Bräuer, G., Carlino, P., Ganobcsik-Williams, L. y Sinha, A. (2012). *Writing programs worldwide. Profiles of academic writing in many places*. <http://wac.colostate.edu/books/wpww/> Recuperado el 01 de junio de 2014.
- Van den Berghe, W. (1998). *Aplicación de las normas ISO 9000 a la enseñanza y la formación*. Recuperado el 27 de agosto de 2017 de https://www.researchgate.net/profile/Wouter_Van_Den_Berghe/publication/28160866_Aplicacion_de_las_normas_ISO_9000_a_la_ensenanza_y_la_formacion/links/55c47eeb08aebc967df202fa/Aplicacion-de-las-normas-ISO-9000-a-la-ensenanza-y-la-formacion.pdf
- Ynoub, R.C. (2007). *El proyecto y la metodología de la investigación*. Buenos Aires: Cengage Learning.
- Ynoub, R.C. (2015). *Cuestión de método. Aportes para una metodología crítica*. México: Cengage Learning.

Anexo: Trabajo 1

Cuestionario preparado para la primera actividad

Nombre y apellido:.....

Fecha:.....Curso.....Aula.....

Trabajo n° 1

Ecuación y trinomio de segundo grado

La actividad que te proponemos consiste en la lectura de las partes, señaladas con los números del 1 al 7, del capítulo 1 de Smith y Gale (1963), y en responder un cuestionario de ocho preguntas sobre el texto leído.

El texto trata sobre la ecuación de segundo grado y el trinomio de segundo grado, temas que ya conoces por haberlos estudiado en la escuela media. Considera que harás un repaso de ellos que te será útil para aplicarlos al estudio del Álgebra y la Geometría que desarrollaremos en esta materia. Este repaso facilitará el aprendizaje de los nuevos temas.

Se trata de que hagas una lectura profunda y reflexiva. Para eso te sugerimos las siguientes pautas:

- ✓ Relee las partes confusas.
- ✓ Precisa las dudas y trata de aclararlas.
- ✓ Relaciona lo leído con lo que ya sabes.
- ✓ Controla si entiendes lo que lees.
- ✓ En el texto encontrarás enunciados que corresponden a definiciones o a proposiciones a demostrar. Es importante que puedas distinguirlos.
- ✓ Acompaña tu lectura con papel y lápiz. Muchas veces rehacer por escrito un cálculo o una demostración mejora la comprensión.

CUESTIONARIO

- 1) El texto utiliza las expresiones “ecuaciones de segundo grado” y “trinomio de segundo grado”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan dichas expresiones?
- 2) ¿Conoce algún otro nombre para las expresiones “ecuaciones de segundo grado” y “trinomio de segundo grado”? ¿Cuál?
- 3) El texto utiliza los términos “raíces” y “ceros”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan dichos términos?
- 4) En el texto aparecen los términos “incógnita” y “variable”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan estos términos?
- 5) ¿Es la tercera forma de (7) de la página 4 válida para $\Delta > 0$ y para $\Delta = 0$? ¿Por qué?
- 6) Muestre que cualquiera sea el valor del discriminante existen un par de constantes (x_0, y_0) tal que:

$$A x^2 + B x + C \equiv A[(x - x_0)^2 + y_0]$$

Expresa x_0 y y_0 como función de los coeficientes del trinomio de segundo.

- 7) En la página 5, parágrafo 5, se indica que si $x_1 = x_2$ la ecuación de condición de los coeficientes es

$$B^2 - 4AC = 0$$

- a) ¿Cuál será la ecuación de condición si $x_1 = -x_2$
b) ¿Cuál será la ecuación de condición si $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$?

En el enunciado del teorema III de la página 11 donde dice “x” ¿qué debería decir?

BIBLIOGRAFÍA

Smith, P. F. y Gale, A. S. (1963). *Elementos de Geometría Analítica*. Buenos Aires, Librería y Editorial Nigar S.R.L. [Traducción de la edición inglesa]

Respuestas modelo del TP1

El texto utiliza las expresiones “ecuaciones de segundo grado” y “trinomio de segundo grado”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan dichas expresiones?

Si el alumno escribe $Ax^2 + Bx + C = 0$ como ECUACIÓN de segundo grado consideraremos correcta a esta parte de la respuesta.

Si el alumno escribe $Ax^2 + Bx + C$ como TRINOMIO de segundo grado consideraremos correcta a esta parte de la respuesta.

Diferencias: Si indica alguna diferencia: por ejemplo, raíces y ceros para ecuación y trinomio respectivamente. Si diferencia otros posibles nombres para cada objeto.

Vinculación: posible respuesta, la misma expresión, pero una está igualada a cero y la otra no.

¿Conoce algún otro nombre para las expresiones “ecuaciones de segundo grado” y “trinomio de segundo grado”? ¿Cuál?

Escritos del alumno en el cual explica u especifica distintos nombres utilizados para estos objetos.

El texto utiliza los términos “raíces” y “ceros”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan dichos términos?

El trinomio tiene ceros, la ecuación raíces. Se aceptan distintas versiones.

En el texto aparecen los términos “incógnita” y “variable”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan estos términos?

Variable para trinomio, incógnita para ecuación. La variable se convierte en incógnita cuando el trinomio se iguala a cero o una constante. Se aceptarán otras versiones de esta idea.

¿Es la tercera forma de (7) de la página 4 válida para $\Delta > 0$ y para $\Delta = 0$? ¿Por qué?

No depende de $\Delta > 0$ o $\Delta = 0$

Muestre que cualquiera sea el valor del discriminante existen un par de constantes (x_0 , y_0) tal que:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv A[(x - x_0)^2 + y_0]$$

Expresa x_0 y y_0 como función de los coeficientes del trinomio de segundo

Operando con la expresión del enunciado se llega $-\frac{B}{2A} = x_0$ $\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4} = y_0$

7) En la página 5, párrafo 5, se indica que si $x_1 = x_2$ la ecuación de condición de los coeficientes es

$$B^2 - 4AC = 0$$

a) ¿Cuál será la ecuación de condición si $x_1 = -x_2$

b) ¿Cuál será la ecuación de condición si $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$?

$C = 0$, b) $A = B$

En el enunciado del teorema III de la página 11 donde dice “x” ¿qué debería decir?

Debería decir: x^2

Ejemplos de evaluación de algunos trabajos

Comienzo del escrito del alumno A

Alumno A

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	Total	Máximo
Nota	3	3	4	2	1	0	1	1	15	32

1) La expresión "ecuaciones de segundo grado" se diferencia de la expresión "trinomio de segundo grado", esto se debe a que una ecuación de segundo grado está compuesta por dos miembros, el primero, que es un trinomio de segundo grado, y además el segundo, que es una igualdad. Esta igualdad es la que hace la diferencia entre ambas expresiones **¿Cuáles son?** **PC**

2) A la "ecuación de segundo grado" también se la conoce como ecuación CUADRÁTICA. **PC**

3) Los ceros del trinomio son aquellos números que hacen igualar a dicho trinomio a 0, cuando se substituye la variable x.

Los ceros del trinomio son, al mismo tiempo, las raíces de la ecuación de segundo grado, por lo que se dice que una raíz de una ecuación de segundo grado satisface a dicha ecuación. **C**

4) Se denomina incógnita a una variable cuyo valor no se sabe, y hay que averiguar, por lo tanto **se denomina variable a cualquier valor que puede "variar"**, tomando distintos valores. **PI**

5) **No, porque esa fórmula se utiliza para averiguar raíces imaginarias**, y cuando el valor es ≥ 0 , las raíces no son imaginarias, por lo tanto no se aplica esta fórmula. **I**

6) **NO RESPONDE**

7) a_ La ecuación de condición será= $B^2 - 4AC > 0$. **¿Restricción para los coeficientes?**

b_ La ecuación de condición será= $A(x-x_1)(x-x_2)$. **I**

8) **Debería decir "una variable"**. **I**

Fin del escrito del alumno A

Comienzo del escrito del alumno B

Trabajo n° 1

Ecuación y trinomio de segundo grado

Alumno B

Curso: K-1022

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	Total	Máximo
Nota	4	4	2	2	4	4	4	4	28	32

Fecha de entrega: 13/04/15

Respuestas:

- 1) El trinomio de segundo grado posee constantes arbitrarias A, B y C, donde $A \neq 0$ y C es el termino constante: Ax^2+Bx+C . Y las ecuaciones de segundo grado es el trinomio de segundo grado igualado a 0 o algún término, donde haya que despejar la incógnita "x": $Ax^2+Bx+C=0$. Su vinculación es que el trinomio de segundo grado se iguala a cero para sacar sus raíces x_1 y x_2 . **C**
- 2) Se conoce también como ecuación cuadrática y polinomio de segundo grado. **C**
- 3) Las raíces de una ecuación de segundo grado **son cuando la parábola corta en el eje x.** Los ceros de la ecuación son los valores de la variable x que hacen igual a cero el trinomio de segundo grado. **PI**
- 4) La incógnita es la x, cuando hay una ecuación que resolver. La variable es cuando por ejemplo la x se puede substituir por otro valor. **PI**
- 5) Si, también es válida para $\Delta > 0$ y $\Delta = 0$ porque $A \left[\left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2} \right]$ es igual a $Ax^2 + Bx + C$ de donde se obtiene también la primera y segunda forma de (7). **C**
- 6) Si igualamos la ecuación dada $Ax^2 + Bx + C \equiv A[(x - x_0)^2 + y_0]$ en:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv A \left[\left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2} \right]$$

$$x - x_0 = x + \frac{b}{2a} \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a^2} = y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

C

7)

a) si $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \text{si } B=0 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{\sqrt{-4ac}}{2a}$$

b) si $x_1 = 0, x_2 = -1$

$$Ax^2 + Bx = 0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\frac{B}{A} = -1 \Rightarrow b = a$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-b + b}{2a} = 0, si b = a \\ \frac{-b - b}{2a} = -1, si b = a \end{cases}$$

C

8) Donde dice “x” debería decir x^2 . C

Fin del escrito del alumno B

Comienzo del escrito del alumno C

Trabajo Práctico N°1

Ecuación y trinomio de segundo grado

Apellido y nombre: Alumno C

Curso:K1022

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	Total	Máximo
Nota	4	3	3	3	4	4	4	0	29	32

Fecha de entrega: 13/04

Cuestionario

- 1) El texto utiliza las expresiones “ecuaciones de segundo grado” y “trinomio de segundo grado”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan dichas expresiones?
- 2) ¿Conoce algún otro nombre para las expresiones “ecuación de segundo grado” y “trinomio de segundo grado”? ¿Cuál?
- 3) El texto utiliza los términos “raíces” y “ceros”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan dichos términos?

- 4) El texto utiliza los términos “incógnita” y “variables”. ¿En qué se diferencian y como se vinculan dichos términos?
- 5) ¿Es la tercera forma de (7) de la página 4 válida para $\Delta > 0$ y $\Delta = 0$? ¿Por qué?
- 6) Muestre que cualquiera sea el valor del discriminante existen un par de constantes (x_0, y_0) tal que:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv A[(x - x_0)^2 + y_0]$$

Expresa x_0 y y_0 como función de los coeficientes del trinomio de segundo.

- 7) En la página 5, párrafo 5, se indica que si $x_1 = x_2$ la ecuación de condición de los coeficientes es $B^2 - 4AC = 0$

- a) ¿Cuál será la ecuación de condición si $x_1 = -x_2$?
- b) ¿Cuál será la ecuación de condición si $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$?

- 8) En el enunciado del teorema III de la página 11 donde dice “x” ¿Qué debería decir?

- 1) La diferencia entre ambas expresiones radica en que la ecuación de segundo grado es una igualdad donde “x” es la incógnita y posee raíces. En cambio, el trinomio de segundo grado es la forma de expresar funciones de segundo grado y la “x” representa la variable independiente y posee ceros.

A su vez, se vinculan entre si debido a que el trinomio de segundo grado es el primer miembro de la ecuación de segundo grado. **PC**

- 2) Si conozco otro nombre: “ecuaciones cuadráticas”. **PC**

- 3) Las raíces son aquellos valores que verifican a la ecuación (en este caso de segundo grado) y, en cambio, los ceros son aquellos números que al substituirlos por la variable “x” iguala a cero al trinomio y son los **puntos donde la función atraviesa el eje de abscisas**. Se vinculan entre si ya que los ceros del trinomio de segundo grado son, a su vez, las raíces de la ecuación de segundo grado. **PC**

- 4) El término variable hace referencia a una letra que puede tomar infinitos valores en un determinado problema o función, en cambio, una incógnita hace referencia a uno o más valores que satisfacen a una ecuación. **Se vinculan de manera que las variables que igualan a cero una función son aquellas que son iguales a una raíz (o sea, una incógnita de la ecuación)** **PC**

- 5) Sí, la tercera forma es válida para los otros casos debido a que parten del trinomio de segundo grado que los abarca también a ellos, como se explicará a continuación:

- $Ax^2 + Bx + C$ Partimos del trinomio de segundo grado;

- $A(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A})$ Aplicamos factor común “A” a todos los términos.
- $A(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2})$ Incluimos el miembro $\frac{B^2}{4A^2}$ sumando y restando para mantener la igualdad.
- $A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right]$ Reducimos el trinomio cuadrado perfecto: “ $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2}$ ” a su expresión de binomio elevado al cuadrado.
- $A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2}\right]$ Se incluye el miembro $\frac{C}{A}$, haciendo las debidas multiplicaciones para mantener la igualdad. **C**

6) Si tenemos que $Ax^2 + Bx + C \equiv A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2}\right]$

y que $Ax^2 + Bx + C \equiv A[(x - x_0)^2 + y_0]$

Entonces podemos decir que $-x_0 = \frac{B}{2A}$ y que $y_0 = \frac{4AC - B^2}{4A^2}$ **C**

7) a. Si $x_1 = -x_2$, se tendrá que la ecuación de condición es $B = 0$, siendo este el caso II de las formas particulares de la ecuación de segundo grado. Esto se demuestra ya que:

- $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$ La suma de las raíces tiene esta forma.
- $x_1 + x_2 = 0$ La suma se ve igualada a 0 cuando $B = 0$.
- $x_1 = -x_2$ Por lo tanto se obtiene que las raíces poseen el mismo valor numérico pero con signo contrario.

b. Si $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$, se tendrá que las ecuaciones de condición son $C = 0$ y $B = A$, siendo este un caso perteneciente al caso I de las formas particulares de la ecuación de segundo grado. Esto se demuestra ya que:

- $A0^2 + B0 + C = 0$ Por sustitución obtenemos que $C = 0$.
- $Ax^2 + Bx = 0$ La ecuación se toma esta forma.
- $x(Ax + B) = 0$ Realizando factor común x nos quedamos con esta forma.
- $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{B}{A}$ Esas serían las raíces que satisfacen a la ecuación.
- $-\frac{B}{A} = -1$ Reemplazando obtenemos esta igualdad.
- $B = A$ Finalmente obtenemos la segunda condición para este caso. **C**

8) En lugar de “x” debería decir “B”. **I**

Fin del escrito del alumno C

Trabajo Práctico número 1

Ecuación y trinomio de segundo grado

Alumno D

K-1022

11/04/2015

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	Total	Máximo
Nota	4	4	4	4	4	2	3	0	25	32

Ecuación y trinomio de segundo grado

Resolución:

1. Toda ecuación de segundo grado puede representarse, en su forma general, como un trinomio de segundo grado, por ejemplo:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ Este es el trinomio}$$

Siendo los coeficientes A, B y C constantes arbitrarias y siempre tomando en cuenta que A es distinto de 0, ya que en ese caso la ecuación no sería de segundo grado.

Aunque esto no significa que toda ecuación de este tipo es un trinomio de segundo grado, por ejemplo:

$$Ax^2 = 0$$

Esta ecuación no representa un trinomio, pero sí es de segundo grado. No toda ecuación de segundo grado está representada por un trinomio de segundo grado, pero sí todo trinomio de segundo grado se puede representar como una ecuación de segundo grado.

La relación que podemos encontrar entre “ecuación de segundo grado” y “trinomio de segundo grado” es que para operar (factorizar) sobre un trinomio de este tipo, debemos igualarlo a 0, convirtiéndolo así en una ecuación de segundo grado para resolver. **C**

2. El término “ecuación de segundo grado” comparte significado con la expresión “ecuación cuadrática”, “ecuación polinómica de grado 2”. Por otra parte, “trinomio de segundo grado” se podría expresar también como “trinomio de cuadrado perfecto” si se está

hablando de un trinomio que se pueda reducir a la expresión $(a + b)^2$, también podría llamarse “trinomio cuadrático”. C

3. La relación que comparten el trinomio de segundo grado y la ecuación de segundo grado con respecto a “raíces” y “ceros” se podría definir en que, el trinomio, posee ceros, que son aquellos valores que, una vez reemplazadas en el trinomio, obtengo 0 como resultado total al operar. Por ejemplo:

Mejorar redacción, idea muy bien

$$x^2 + 2x + 1$$

Este ejemplo es un trinomio de grado dos cuyo “cero” es “-1”, porque si reemplazo por “x” este valor en el trinomio, obtengo 0 como resultado

En cambio, en una ecuación de segundo grado, a estos valores se los denomina “raíces”, porque cuando la “x” toma estos valores, me igualan a cero la ecuación, satisfaciéndola. Por ejemplo:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Este ejemplo es una ecuación de segundo grado cuyo “raíz” es “-1”, porque si reemplazo por “x” este valor en dicha ecuación, obtengo 0 como resultado, satisfaciéndola.

Estos términos guardan relación cuando, por ejemplo, se obtiene una ecuación de segundo grado, las “raíces” son aquellos valores que me la satisfacen, pero si uno observa en el miembro donde el polinomio está expresado, esas “raíces” son a su vez los “ceros” de la ecuación. C

4. “Variable” se refiere a, por ejemplo, una letra, ya sea “A”, “V”, “J”, que en un mismo problema, se le puede asignar un número ilimitado de valores. Mientras tanto, el término “incógnita” se utiliza cuando se está haciendo referencia a aquella variable cuyo valor ya asignado se desconoce y dicho valor no puede ser intercambiado (teniendo en cuenta que este valor verifica la ecuación).

Toda incógnita es una variable, pero no toda variable es una incógnita. C

Sí, es válida para ambos a continuación será probado con la simple resolución Reducción?

5. de la ecuación a su mínima expresión:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2}$$

Se opera lo que se encuentra entre paréntesis:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv A\left[x^2 + \frac{Bx}{A} + \frac{B^2}{4A^2} + \frac{4AC}{4A^2} - \frac{B^2}{4A^2}\right]$$

Se simplifica:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv A\left[x^2 + \frac{Bx}{A} + \frac{C}{A}\right]$$

Se aplica la propiedad distributiva, obteniendo así, la forma general:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv Ax^2 + Bx + C$$

C

6.

$$Ax^2 + Bx + C \equiv A[(x - x_0)^2 + y_0]$$

Se opera lo que se encuentra entre paréntesis:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv A[x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y_0]$$

Se aplica la propiedad distributiva:

$$Ax^2 + Bx + C \equiv Ax^2 - 2Axx_0 + Ax_0^2 + Ay_0$$

A partir de esto obtenemos tres ecuaciones:

$$Ax^2 = Ax^2$$

$$Bx = -2Axx_0$$

Se igualan los coeficientes: $A = A$, $B = -2A x_0$

$$C = Ax_0^2 + Ay_0$$

Procedemos a operar con la segunda ecuación para poder despejar x_0

$$Bx = -2Axx_0$$

$$-\frac{B}{2A} = x_0$$

Procedemos a operar con la tercera ecuación para poder despejar y_0

$$C = Ax_0^2 + Ay_0$$

$$C - Ax_0^2 = Ay_0$$

$$\frac{C - Ax_0^2}{A} = y_0$$

Se reemplaza x_0^2 por el valor obtenido en la segunda ecuación

$$\frac{C - A\left(-\frac{B}{2A}\right)^2}{A} = y_0$$

$$\frac{C - \frac{B^2}{4A}}{A} = y_0$$

$$\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4} = y_0$$

Error algebraico. Revisar.

PI

7. Punto A.

- Si $x_1 = -x_2$, al expresar nuestro polinomio de segundo grado (reemplazando x_1 por $-x_2$) en la forma factorizada, obtenemos:

$$A(x + x_2)(x - x_2)$$

$$(Ax + Ax_2)(x - x_2)$$

$$Ax^2 + Axx_2 - Axx_2 - Ax_2^2$$

$$Ax^2 - Ax_2^2$$

Al lograr este resultado, podremos verificar que para que se cumpla que $x_1 = -x_2$ el coeficiente de grado 1 (“B”) de la forma general del trinomio de segundo grado debe ser equivalente a 0, y el término independiente (“C”) debe ser distinto de 0.

no necesariamente, porque $0 = -0$ pero está bien pensado.

Para verificar, supongamos un ejemplo donde tenemos que $x_2 = 2$ y se cumple la condición de que $x_1 = -x_2$, y se conoce que “A” toma como valor 4, el ejercicio quedaría de la siguiente manera:

$$4(x + 2)(x - 2)$$

$$4(x^2 - 4)$$

$$4x^2 - 16$$

Aquí se puede comprobar que el coeficiente de grado 1 (“B”) es 0, y el término independiente (“C”) es distinto de 0.

Punto B.

- Si $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$, al expresar nuestro polinomio en la forma factorizada, y reemplazando los valores, obtenemos:

$$A(x - 0)(x + 1)$$

$$Ax(x + 1)$$

$$Ax^2 + Ax$$

Al lograr este resultado, podemos verificar que para que se cumpla $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$, el término independiente (“C”) debe ser equivalente a 0, y a su vez el coeficiente de grado 1 (“B”) de la forma general del trinomio de segundo grado debe ser **equivalente** al coeficiente de grado 2 (“A”).

igual C

8. En el enunciado del teorema III de la página 11, donde dice “ x ”, debería decir x^2 , ya que en la expresión canónica de nuestro polinomio de segundo grado tenemos las siguientes variantes:

No entiendo el razonamiento que sigue...

- Si $\Delta = 0$, significa que $A > 0$, y entonces $F(x_v) = 0$???
- Si $\Delta > 0$, o $A > 0$ y $F(x_v) < 0$, o bien $A < 0$ y $F(x_v) > 0$
- Si $\Delta < 0$, o $A > 0$, y entonces $F(x_v) > 0$, o bien $A < 0$, y entonces $F(x_v) < 0$

Se proponen 5 ejemplos para verificar:

1. $F(x) = x^2 + 2x + 1$

$$x_v = \frac{-2}{2} = -1$$

$$F(x_v) = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 * 1 * 1 = 0$$

Aquí se observa que $A > 0$ y $\Delta = 0$, por lo tanto, $F(x_v) = 0$

$$2. \quad F(x) = -x^2 + 2x + 1$$

$$x_v = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$F(x_v) = -(1)^2 + 2(1) + 1 = 2$$

$$\Delta = 2^2 - 4 * (-1) * 1 = 8$$

Aquí se observa que $A < 0$ y $\Delta > 0$, por lo tanto, $F(x_v) > 0$

$$3. \quad F(x) = 4x^2 + 8x + 5$$

$$x_v = \frac{-8}{8} = -1$$

$$F(x_v) = 4(-1)^2 + 8(-1) + 5 = 1$$

$$\Delta = 8^2 - 4 * 4 * 5 = -16$$

Aquí se observa que $A > 0$ y $\Delta < 0$, por lo tanto, $F(x_v) > 0$

$$4. \quad F(x) = -5x^2 + 3x - 2$$

$$x_v = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}$$

$$F(x_v) = -5\left(\frac{3}{10}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{10}\right) - 2 = -\frac{31}{20}$$

$$\Delta = 3^2 - 4 * (-5) * (-2) = -31$$

Aquí se observa que $A < 0$ y $\Delta < 0$, por lo tanto, $F(x_v) < 0$

$$\begin{aligned} 5. \quad F(x) &= 3x^2 + 18x + 9 \\ x_v &= \frac{-18}{6} = -3 \\ F(x_v) &= 3(-3)^2 + 18(-3) + 9 = -18 \end{aligned}$$

$$\Delta = 18^2 - 4 * 3 * 9 = 216$$

Aquí se observa que $A > 0$ y $\Delta > 0$, por lo tanto, $F(x_v) < 0$

No se pedían estos ejemplos. No sé cómo calificar: la respuesta que se pedía está dicha, pero el razonamiento que sigue no se entiende?

PC

Fin del escrito del alumno D

Anexo: Trabajo 2

Trabajos prácticos desarrollados para la actividad de Escritura Académica

Trabajo Práctico 2

Nombre y apellido:.....

Fecha:.....Curso.....Aula.....

Trabajo n° 2

Correspondiente al capítulo 3 sección 3.1 a 3.3. Páginas 163 a 170 del texto: Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal. Kozak, A., Pastorelli, S., Vardanega, P. McGraw-Hill/Interamericana Editores. (2007).

3.1) Ingeniería y cónicas

3.2) Lugar geométrico

3.2.1) Lugares geométricos simétricos

3.2.1.1) Simetría respecto de una recta

3.2.1.1.1) Simetría con respecto al eje y

3.2.1.1.2) Simetría con respecto al eje x

3.3) Transformación de coordenadas

3.3.1) Traslación de los ejes coordenados

Objetivos:

Que el alumno:

1) Adquiera el concepto de lugar geométrico.

2) Aplique los conceptos de simetría y transformaciones de coordenadas a un lugar geométrico.

3) Relacione las nociones algebraicas de simetría y transformaciones de coordenadas con sus versiones gráficas.

Pautas a tener en cuenta para la realización del trabajo.

1) Explica por escrito en lenguaje coloquial los pasos seguidos en la resolución.

2) Se cuidadoso con los procedimientos algebraicos que apliques y revisa los cálculos que hagas.

3) Puedes ayudarte con algún *software* para graficar las curvas.

4) La realización del trabajo es de tu exclusiva responsabilidad. No obstante puedes intercambiar ideas con tus compañeros, formular y responder consultas en el foro. Se espera que el trabajo muestre tu aporte personal.

Trabajo n° 2

1) Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos del plano A(1,0) y B(0,1).

2) Analiza la simetría con respecto a los ejes coordenados y al origen de coordenadas de los lugares geométricos:

a) $xy = 2$

b) $4y^2 - x - 3 = 0$

3) Dada la recta $y = x + 1$. Encuentra la ecuación de la misma respecto de un sistema de ejes paralelos a los cartesianos con origen en el punto (3,4). Escribe las ecuaciones de traslación.

Trabajo Práctico 3

Nombre y apellido:.....

Fecha:.....Curso.....Aula.....

Trabajo n°3

Correspondiente a la sección 3.4 a 3.5, páginas 175 a 181.

3.4) Superficie cónica y curvas cónicas

3.4.1) Origen del nombre cónica

3.4.2) Cónicas. Definición geométrica

3.5) Circunferencia

3.5.1) Obtención de la ecuación de la circunferencia

Objetivos:

Que el alumno

- 1) Adquiera el concepto de superficie cónica.
- 2) Conozca la definición geométrica de las distintas cónicas.
- 4) Aplique la definición de cónica al caso de circunferencia.
- 5) Asocie la ecuación de una circunferencia al gráfico que le corresponde.

Pautas a tener en cuenta para la realización del trabajo.

- 1) Explica por escrito en lenguaje coloquial los pasos seguidos en la resolución.
- 2) Se cuidadoso con los procedimientos algebraicos que apliques y revisa los cálculos que hagas.
- 3) Puedes ayudarte con algún software para graficar las curvas.
- 4) La realización del trabajo es de tu exclusiva responsabilidad. No obstante puedes intercambiar ideas con tus compañeros, formular y responder consultas en el foro. Se espera que el trabajo muestre tu aporte personal.

Trabajo n°3

- 1) ¿Cuál es el origen del nombre cónica?
- 2) ¿Cómo se obtiene la circunferencia a partir de una superficie cónica?
- 3) Dada la ecuación de segundo grado

$$2x^2 + 2y^2 + 4x + 2y + k/2 = 0$$

- a) Indica para qué valores de k reales la ecuación representa una circunferencia.
- b) Si $k = 5$, ¿qué representa geométricamente la ecuación de segundo grado?
- 4) ¿En qué caso la intersección de un plano con una superficie cónica es un punto?

Trabajo Práctico 4

Nombre y apellido:.....

Fecha:.....Curso.....Aula.....

Trabajo n° 4:

Correspondiente a la sección 3.6 a 3.7, páginas 185 a 202

3.6) Elipse

3.6.1) Obtención de la ecuación canónica de la elipse.

3.6.2) Elementos de la elipse.

3.6.2.1) Casos particulares

3.6.3) Ecuación ordinaria de la elipse.

3.7) Parábola

3.7.1) Ecuaciones canónicas de la parábola de directriz paralela a los ejes coordenados.

3.7.1.1) Foco sobre el eje y.

3.7.1.2) Foco sobre el eje x.

3.7.2) Ecuaciones ordinarias de la parábola: vértice en (h; k) y directriz paralela a uno de los ejes coordenados.

Objetivos:

Que el alumno:

- 1) Conozca la definición de elipse como lugar geométrico
- 2) Pueda hallar la ecuación ordinaria de la elipse a partir de la ecuación de segundo grado
- 3) Pueda describir gráfica y analíticamente los elementos de una elipse a partir de su ecuación canónica o de su ecuación ordinaria.
- 4) Conozca la definición de la parábola como lugar geométrico
- 5) Pueda hallar la ecuación ordinaria de la parábola a partir de la ecuación de segundo grado
- 6) Pueda describir gráfica y analíticamente los elementos de una parábola a partir de su ecuación canónica o de su ecuación ordinaria.

Pautas a tener en cuenta para la realización del trabajo.

- 1) Explica por escrito en lenguaje coloquial los pasos seguidos en la resolución.
- 2) Se cuidadoso con los procedimientos algebraicos que apliques y revisa los cálculos que hagas.
- 3) Puedes ayudarte con algún software para graficar las curvas.
- 4) La realización del trabajo es de tu exclusiva responsabilidad. No obstante puedes intercambiar ideas con tus compañeros, formular y responder consultas en el foro. Se espera que el trabajo muestre tu aporte personal.

Trabajo n° 4:

1) Dada la ecuación $2x^2 + 4y^2 + kx - 6 = 0$. Encuentra el valor de k de modo que la ecuación represente una elipse con centro en el punto (-2, 0). Con el valor de k hallado encuentra las coordenadas de los vértices y la excentricidad

2) Encuentra la ecuación de la parábola con eje de simetría paralelo al eje "x", vértice en el punto V(1,3) y pasa por el punto P(-1, -1).

3) Dada la ecuación de la parábola, halla su forma ordinaria y determina el vértice, foco, directriz y realiza la gráfica.

$$1 - 6x + 4y - 2y^2 = 0$$

Trabajo Práctico 5

Nombre y apellido:.....

Fecha:.....Curso.....Aula.....

Trabajo nº 5

Correspondiente a la sección 3.8, páginas 202 a 210.

3.8) Hipérbola

3.8.1) Obtención de la ecuación canónica de la hipérbola.

3.8.2) Elementos de la hipérbola.

3.8.3) Ecuación ordinaria de la hipérbola.

Objetivos:

Que el alumno:

- 1) Conozca la definición de hipérbola como lugar geométrico.
- 2) Obtenga la ecuación ordinaria de la hipérbola a partir de alguno de sus elementos.
- 3) Describa gráfica y analíticamente los elementos de una hipérbola a partir de su ecuación canónica o de su ecuación ordinaria.

Pautas a tener en cuenta para la realización del trabajo.

- 1) Explica por escrito en lenguaje coloquial los pasos seguidos en la resolución.
- 2) Se cuidadoso con los procedimientos algebraicos que apliques y revisa los cálculos que hagas.
- 3) Puedes ayudarte con algún software para graficar las curvas.
- 4) La realización del trabajo es de tu exclusiva responsabilidad. No obstante puedes intercambiar ideas con tus compañeros, formular y responder consultas en el foro. Se espera que el trabajo muestre tu aporte personal.

Trabajo nº 5

1) Halla la ecuación de la hipérbola con uno de sus focos en (1,3) y cuyas asíntotas son

$$y - 1 = \pm\sqrt{3} (x - 1)$$

y halla las coordenadas del otro foco.

2) Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de distancias a los puntos (5,0) y (-5,0) sea igual a 6.

3) Dada la cónica de ecuación

$$-y^2 + 9x^2 - 8y - 16 = 0$$

Halla la ecuación ordinaria y grafica dicha cónica.

Trabajo Práctico 6

Nombre y apellido:.....

Fecha:.....Curso.....Aula.....

Trabajo nº 6

Correspondiente a la sección 3.9, páginas 210 a 215

3.9) Análisis de la ecuación general de segundo grado en dos variables.

3.9.1) Ecuación general de segundo grado incompleta y cónicas: condición necesaria.

3.9.2) Ecuación general de segundo grado incompleta y cónicas: condición suficiente.

3.9.3) Cónicas y la ecuación de segundo grado completa.

Objetivo:

Que el alumno

1) Identifique la cónica a partir de la ecuación de segundo grado a dos variables

Pautas a tener en cuenta para la realización del trabajo.

1) Explica por escrito en lenguaje coloquial los pasos seguidos en la resolución.

2) Se cuidadoso con los procedimientos algebraicos que apliques y revisa los cálculos que hagas.

3) Puedes ayudarte con algún software para graficar las curvas.

4) La realización del trabajo es de tu exclusiva responsabilidad. No obstante puedes intercambiar ideas con tus compañeros, formular y responder consultas en el foro. Se espera que el trabajo muestre tu aporte personal.

Trabajo nº 6

1) ¿A qué tipo de cónica corresponde la siguiente ecuación según los distintos valores de k?

$$(8-k) x^2 + k y^2 = 8k - k^2$$

2) Halla la ecuación canónica, si es posible, de la cónica representada por la ecuación de segundo grado

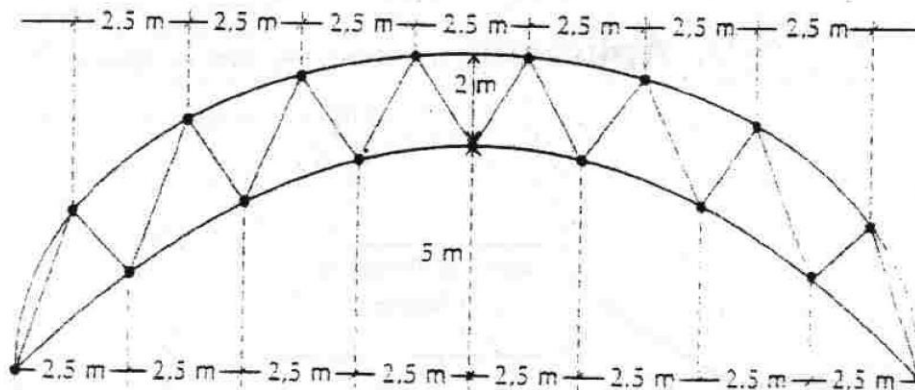
$$4 x^2 - 4 y^2 + 16x - 20y - 9 = 0$$

Anexo: Trabajo 3

Enunciado del Trabajo Final

Problema

Se desea cubrir un terreno con un techo cuya sección transversal es semielíptica. El frente del terreno es de 20 m y la profundidad es de 48 m. El techo semielíptico se apoyará sobre una curva parabólica a través de barras, como indica la figura. La estructura de las barras y la curva parabólica se ubicarán transversalmente cada 6 m. Calcular la longitud de cada barra y la longitud total del material para construir todas las barras necesarias.



Pautas a tener en cuenta para la resolución del problema.

- 1) Explica por escrito, en lenguaje coloquial, los pasos seguidos en la resolución.
- 2) Se cuidadoso con los procedimientos algebraicos que apliques y revisa los cálculos que hagas.
- 3) Utiliza el *editor de ecuaciones* cuando necesites escribir en el lenguaje formal de la matemática.
- 4) Puedes ayudarte con algún *software* para graficar las curvas, realizar los cálculos, o utilizar otros medios visuales, que creas convenientes, para comunicar tus ideas.
- 5) Escribe con claridad. Muestra que tus ideas tienen fundamento. Tu trabajo debe ser de fácil comprensión para quien lo lea.
- 6) La realización del trabajo es de tu exclusiva responsabilidad. No obstante, puedes intercambiar ideas con tus compañeros. Se espera que el trabajo muestre tu impronta personal.

**Escrito de un alumno del curso
Experimental**

orden 8

Secciones Cónicas

Trabajo final

Trabajo Práctico Final desarrollado por un alumno del curso experimental
y evaluado por dos docentes pertenecientes al proyecto

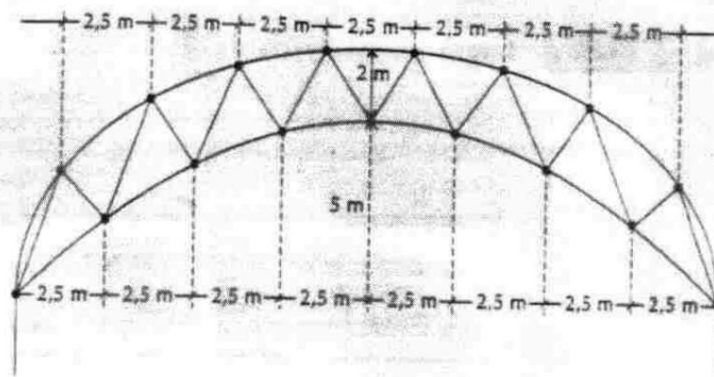
Apellido y Nombre: ALUMNO D

Curso: K1022

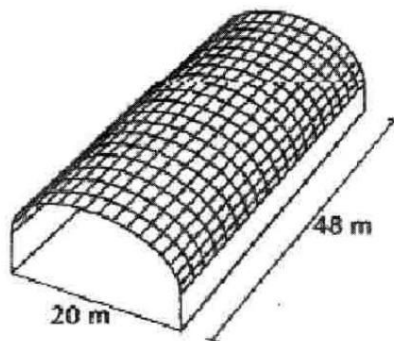
Fecha de entrega: 22/09/15

Problema

Se desea cubrir un terreno con un techo cuya sección transversal es semielíptica. El frente del terreno es de 20 m y la profundidad es de 48 m. El techo semielíptico se apoyará sobre una curva parabólica a través de barras, como indica la figura. La estructura de las barras y la curva parabólica se ubicarán transversalmente cada 6 m. Calcular la longitud de cada barra y la longitud total del material para construir todas las barras necesarias.



Del enunciado también se deduce el siguiente grafico para darnos una mejor idea del problema:



En primer lugar para poder resolver la situación planteada debemos reconocer los datos que nos proporciona el enunciado. Nos habla de un techo cuya sección transversal es semielíptica y se apoya sobre una curva parabólica a través de barras, es decir que sin lugar a dudas necesitaremos la ecuación de una elipse y de una parábola. En la primera figura podemos observar que se nos da de dato un centro, el cual a izquierda y a derecha tiene 10m respectivamente de cada lado, 5 metros hasta llegar al vértice de la parábola y 7 hasta llegar a la elipse.

A su vez podemos deducir de la figura un sistema de ejes cartesianos (x,y) con centro (0,0) en el centro de la figura. De ahí decimos que los puntos (-10,0) y (0,10) pertenecen tanto a la parábola como a la elipse, que el punto (0,5) pertenece a la parábola y que el punto (0,7) pertenece a la elipse. También es necesario destacar que la figura es simétrica a izquierda y a derecha del origen. Por lo tanto, como son 16 barras, nos enfocaremos en el lado derecho de la figura y conseguiremos la longitud de las 8 barras del lado derecho, las cuales miden lo mismo que sus simétricas del lado izquierdo.

Para buscar la ^{ecuación} elipse recordamos que su fórmula es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en este caso nuestras incógnitas son a^2 y b^2 .

Utilizando los datos que obtuvimos del enunciado sabemos que el punto (10,0) y el punto (0,7) pertenecen a nuestra elipse, reemplazando los valores en la fórmula general de la elipse:

Punto (10,0)

$$\frac{10^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{10^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 100$$

Punto (0,7)

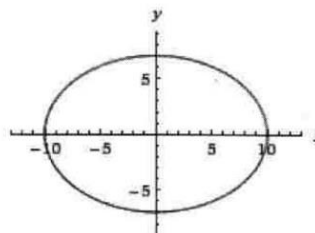
$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{7^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{7^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 7^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 49$$

De donde conseguimos la fórmula de la elipse que representa a la figura:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1$$

La observamos en un gráfico aparte:



Por otra parte, con lo que respecta a la parábola recordemos que su forma general es $y - k = \frac{(x-h)^2}{4c}$, con vértice en (h;k). Afortunadamente la figura nos proporciona las componentes del vértice de la parábola que buscamos, es el punto (0,5), por lo que $k=5$ y $h=0$. Reemplazando obtenemos:

$$y - 5 = \frac{(x - 0)^2}{4c} \Rightarrow y - 5 = \frac{x^2}{4c}$$

Ahora únicamente nos resta hallar el valor de c para conseguir la parábola deseada, para ello tomaremos el punto (0,10) que pertenece a la parábola:

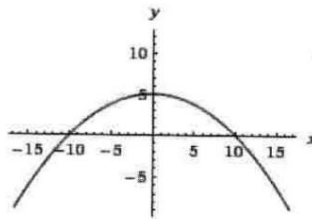
$$0 - 5 = \frac{10^2}{4c} \Rightarrow (-5) * 4c = 10^2 \Rightarrow -20c = 100$$

$$\Rightarrow c = -5$$

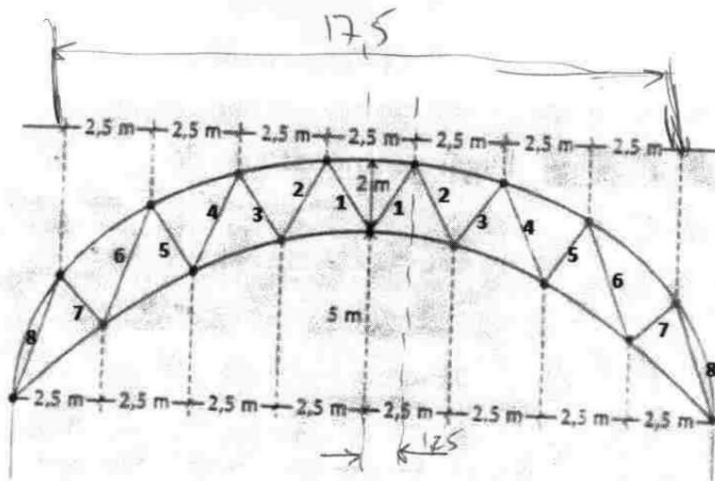
Entonces llegamos a que:

$$\Rightarrow y - 5 = \frac{x^2}{4 * (-5)} \Rightarrow y - 5 = \frac{x^2}{-20}$$

Observamos a la parábola en un gráfico aparte:



Ya habiendo obtenido la parábola y la elipse que representan la figura, destacamos que las todas las barras tienen un punto de inicio en una de las dos (la parábola o la elipse) y un punto final en la otra. Entonces podemos afirmar que la longitud de cada barra será igual a la distancia entre esos puntos. Al lado de cada barra hay un número para identificarlas, las barras con el mismo número miden lo mismo, ya que son simétricas:



La figura muestra en la parte inferior que tiene una longitud a lo ancho de 20m, a su vez podemos ver en la parte superior una longitud de 17,5m con subdivisiones de 2,5m. Como la figura es simétrica con respecto a la línea recta que sale del centro (sería nuestro eje y) sabemos que ambos lados deben ser iguales, de ahí deducimos que la distancia del 2,5m de la parte inferior al 2,5m de la parte superior debe ser 1,25m para que esto se cumpla, sino se perdería la simetría.

Semántica

Dicho esto, ya podemos obtener las coordenadas de todos los puntos para comenzar a sacar las longitudes de las barras, valiéndonos de las fórmulas anteriormente halladas.

Barra 1

Se observa en el grafico que la barra 1 inicia en el punto (0,5) el cual pertenece a la parábola y termina en un punto de la elipse cuya abscisa es 1,25.

Buscamos la coordenada en "y" del punto de la elipse:

$$\frac{1.25^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{49} = 1 - \frac{1.25^2}{100} \Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{1.25^2}{100}\right) * 49 \Rightarrow |y| = \sqrt{\left(1 - \frac{1.25^2}{100}\right) * 49}$$

$$\Rightarrow y \cong 6,945$$

Nótese que descartamos el valor de $y \cong -6,945$, esto es debido a que estamos trabajando con los cuadrantes 1 y 2 de los ejes, y ese valor no pertenece a los mismos, por lo cual no lo tomaremos en cuenta.

Ahora que tenemos los dos puntos de la barra (0,5) y (1,25, 6.945) procederemos a buscar la distancia entre los mismos para hallar la longitud de la barra.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(0 - 1.25)^2 + (5 - 6.945)^2} \Rightarrow D \cong 2.312$$

Por lo tanto decimos que:

$$\text{Longitud}_{\text{Barra 1}} \cong 2.312m$$

Barra 2

Se observa en el grafico que la barra 2 inicia en el punto, hallado en el cálculo anterior, (1.25, 6.945) el cual pertenece a la elipse y termina en un punto de la parábola cuya abscisa es 2.5.

Buscamos la coordenada en "y" del punto de la parábola:

$$y - 5 = \frac{2.5^2}{-20} \Rightarrow y = \frac{2.5^2}{-20} + 5$$

$$\Rightarrow y \cong 4.687$$

Ahora que tenemos los dos puntos de la barra (1.25, 6.945) y (2.5, 4.687) procederemos a buscar la distancia entre los mismos para hallar la longitud de la barra.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(1.25 - 2.5)^2 + (6.945 - 4.687)^2} \Rightarrow D \cong 2.581$$

Por lo tanto decimos que:

$$\text{Longitud}_{\text{Barra 2}} \cong 2.581m$$

Barra 3

Se observa en el grafico que la barra 3 inicia en el punto, hallado en el cálculo anterior, (2.5, 4.687) el cual pertenece a la parábola y termina en un punto de la elipse cuya abscisa es 3.75.

Buscamos la coordenada en "y" del punto de la elipse:

$$\frac{3.75^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{49} = 1 - \frac{3.75^2}{100} \Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{3.75^2}{100}\right) * 49 \Rightarrow |y| = \sqrt{\left(1 - \frac{3.75^2}{100}\right) * 49}$$

$$\Rightarrow y \cong 6.489$$

Nótese que descartamos el valor de $y \cong -6.489$, esto es debido a que estamos trabajando con los cuadrantes 1 y 2 de los ejes, y ese valor no pertenece a los mismos, por lo cual no lo tomaremos en cuenta.

Ahora que tenemos los dos puntos de la barra (2.5, 4.687) y (3.75, 6.489) procederemos a buscar la distancia entre los mismos para hallar la longitud de la barra.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(2.5 - 3.75)^2 + (4.687 - 6.489)^2} \Rightarrow D \cong 2.193$$

Por lo tanto decimos que:

$$Longitud_{Barra\ 3} \cong 2.193m$$

Barra 4

Se observa en el grafico que la barra 4 inicia en el punto, hallado en el cálculo anterior, (3.75, 6.489) el cual pertenece a la elipse y termina en un punto de la parábola cuya abscisa es 5.

Buscamos la coordenada en "y" del punto de la parábola:

$$y - 5 = \frac{5^2}{-20} \Rightarrow y = \frac{5^2}{-20} + 5$$
$$\Rightarrow y = 3.75$$

Ahora que tenemos los dos puntos de la barra (3.75, 6.489) y (5, 3.75) procederemos a buscar la distancia entre los mismos para hallar la longitud de la barra.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(3.75 - 5)^2 + (6.489 - 3.75)^2} \Rightarrow D \cong 3.011$$

Por lo tanto decimos que:

$$Longitud_{Barra\ 4} \cong 3.011m$$

Barra 5

Se observa en el grafico que la barra 5 inicia en el punto, hallado en el cálculo anterior, (5, 3.75) el cual pertenece a la parábola y termina en un punto de la elipse cuya abscisa es 6.25.

Buscamos la coordenada en "y" del punto de la elipse:

$$\frac{6.25^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{49} = 1 - \frac{6.25^2}{100} \Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{6.25^2}{100}\right) * 49 \Rightarrow |y| = \sqrt{\left(1 - \frac{6.25^2}{100}\right) * 49}$$
$$\Rightarrow y \cong 5.464$$

Nótese que descartamos el valor de $y \cong -5.464$, esto es debido a que estamos trabajando con los cuadrantes 1 y 2 de los ejes, y ese valor no pertenece a los mismos, por lo cual no lo tomaremos en cuenta.

Ahora que tenemos los dos puntos de la barra (5, 3.75) y (6.25, 5.464) procederemos a buscar la distancia entre los mismos para hallar la longitud de la barra.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(5 - 6.25)^2 + (3.75 - 5.464)^2} \Rightarrow D \cong 2.121$$

Por lo tanto decimos que:

$$Longitud_{Barra\ 5} \cong 2.121m$$

Barra 6

Se observa en el grafico que la barra 6 inicia en el punto, hallado en el cálculo anterior, (6.25, 5.464) el cual pertenece a la elipse y termina en un punto de la parábola cuya abscisa es 7.5.

Buscamos la coordenada en "y" del punto de la parábola:

$$y - 5 = \frac{7.5^2}{-20} \Rightarrow y = \frac{7.5^2}{-20} + 5$$

$$\Rightarrow y \cong 2.188$$

Ahora que tenemos los dos puntos de la barra (6.25, 5.464) y (7.5, 2.188) procederemos a buscar la distancia entre los mismos para hallar la longitud de la barra.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(6.25 - 7.5)^2 + (5.464 - 2.188)^2} \Rightarrow D \cong 3.506$$

Por lo tanto decimos que:

$$Longitud_{Barra\ 6} \cong 3.506m$$

Barra 7

Se observa en el grafico que la barra 7 inicia en el punto, hallado en el cálculo anterior, (7.5, 2.188) el cual pertenece a la parábola y termina en un punto de la elipse cuya abscisa es 8.75.

Buscamos la coordenada en "y" del punto de la elipse:

$$\frac{8.75^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{49} = 1 - \frac{8.75^2}{100} \Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{8.75^2}{100}\right) * 49 \Rightarrow |y| = \sqrt{\left(1 - \frac{8.75^2}{100}\right) * 49}$$

$$\Rightarrow y \cong 3.389$$

Nótese que descartamos el valor de $y \cong -3.389$, esto es debido a que estamos trabajando con los cuadrantes 1 y 2 de los ejes, y ese valor no pertenece a los mismos, por lo cual no lo tomaremos en cuenta.

Ahora que tenemos los dos puntos de la barra (7.5, 2.188) y (8.75, 3.389) procederemos a buscar la distancia entre los mismos para hallar la longitud de la barra.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(7.5 - 8.75)^2 + (2.188 - 3.389)^2} \Rightarrow D \cong 1.733$$

Por lo tanto decimos que:

$$Longitud_{Barra\ 7} \cong 1.733m$$

Barra 8

Se observa en el grafico que la barra 8 inicia en el punto, hallado en el cálculo anterior, (8.75, 3.389) el cual pertenece a la elipse y termina en un punto que comparten la elipse y la parábola (10,0)

Ahora que tenemos los dos puntos de la barra (8.75, 3.389) y (10,0) procederemos a buscar la distancia entre los mismos para hallar la longitud de la barra.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(8.75 - 10)^2 + (3.389 - 0)^2} \Rightarrow D \cong 3.612$$

Por lo tanto decimos que:

$$Longitud_{Barra\ 8} \cong 3.612m$$

Con esto ya hemos logrado calcular la longitud de todas las barras, solamente nos faltaría la longitud total del material para construir todas las barras necesarias. Para esto en primer lugar sumaremos todas las longitudes obtenidas y al resultado lo multiplicaremos por 2, recordando que la figura es simétrica y no son 8, sino 16 barras en cada estructura.

Sumando las longitudes de las barras:

$$2,312m + 2,581m + 2,193m + 3,011m + 2,121m + 3,506m + 1,733m + 3,612m = 21.069m$$

Multipliando al resultado por 2:

$$21.069m * 2 = 42.138m$$

Lo que tenemos ahora es la longitud necesaria para 1 estructura de barras, pero en el enunciado nos dice que se coloca 1 estructura cada 6m, teniendo en cuenta que se tienen 48m de profundidad (ver la segunda figura del principio) podemos decir que necesitamos 9 de estas estructuras, ya que son 8 (48/6) más una que se colocaría al principio.

Entonces, multiplicamos la longitud necesaria para 1 estructura por 9:

$$\begin{aligned} Longitud\ de\ material\ necesario\ para\ construir\ todas\ las\ barras \\ = 42.138m * 9 = 379.242m \end{aligned}$$

**Escrito de un alumno del curso
Control**

Secciones Cónicas

Aplicación

Apellido y Nombre: ALUMNO

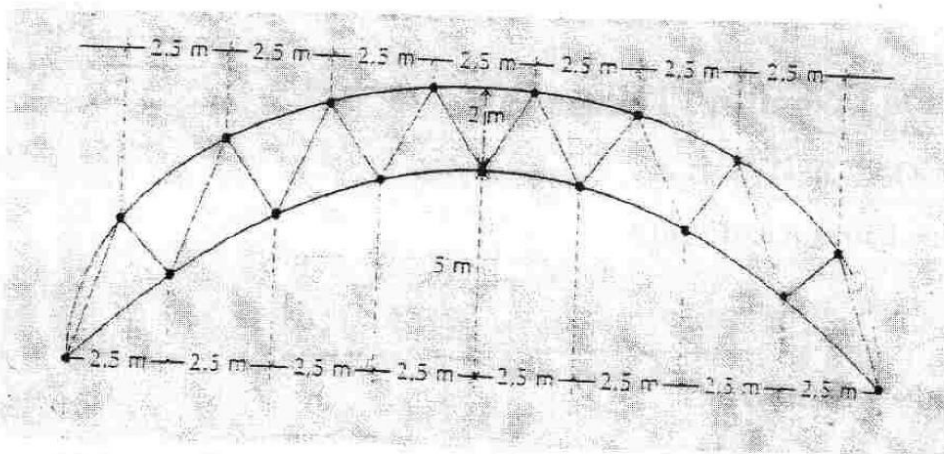
Curso: Z1202

Fecha de Entrega: 05/10/2015

Trabajo Práctico Final desarrollado por un alumno del curso control y evaluado por dos docentes por dos docentes pertenecientes al proyecto

Problema

Se desea cubrir un terreno con un techo cuya sección transversal es semielíptica. El frente del terreno es de 20 m y la profundidad es de 48 m. El techo semielíptico se apoyará sobre una curva parabólica a través de barras, como indica la figura. La estructura de las barras y la curva parabólica se ubicarán transversalmente cada 6 m. Calcular la longitud de cada barra y la longitud total del material para construir todas las barras necesarias.



Pautas a tener en cuenta para la resolución del problema.

- 1) Explica por escrito, en lenguaje coloquial, los pasos seguidos en la resolución.
- 2) Se cuidadoso con los procedimientos algebraicos que apliques y revisa los cálculos que hagas.
- 3) Utiliza el *editor de ecuaciones* cuando necesites escribir en el lenguaje formal de la matemática.
- 4) Puedes ayudarte con algún *software* para graficar las curvas, realizar los cálculos, o utilizar otros medios visuales, que creas convenientes, para comunicar tus ideas.
- 5) Escribe con claridad. Muestra que tus ideas tienen fundamento. Tu trabajo debe ser de fácil comprensión para quien lo lea.
- 6) La realización del trabajo es de tu exclusiva responsabilidad. No obstante, puedes intercambiar ideas con tus compañeros. Se espera que el trabajo muestre tu impronta personal.

1)

PARÁBOLA

Comienzo utilizando la fórmula de una parábola con eje focal igual o paralelo al eje y, pues así me lo muestra en el gráfico.

$$x^2 = 2py$$

Y además, sé que $p < 0$, ya que la forma de la parábola es de una cara triste. *3*

Tomando como referencia el gráfico, sabemos que el vértice de la parábola es $V(0,5)$ y que su foco es $F(0,0)$. Como teoría, tenemos que para conseguir el foco, debemos disminuir el vértice en $p/2$ unidades. En este caso fueron 5, por lo tanto:

3 *Sumando*

$$\begin{aligned} -5 &= \frac{p}{2} \\ p &= -10 \end{aligned}$$

Completando la fórmula de la parábola, nos quedaría:

$$x^2 = -20y$$

NO

*Argument
↓
Buen*

ELIPSE

Comienzo utilizando la fórmula de una elipse con eje focal igual o paralelo al eje x, pues así me lo muestra en el gráfico.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sabemos que el centro de la elipse es $O(0,0)$, y también conocemos los puntos $A(10,0)$, $A'(-10,0)$, $B(0,7)$, $B'(0,-7)$, por lo que:

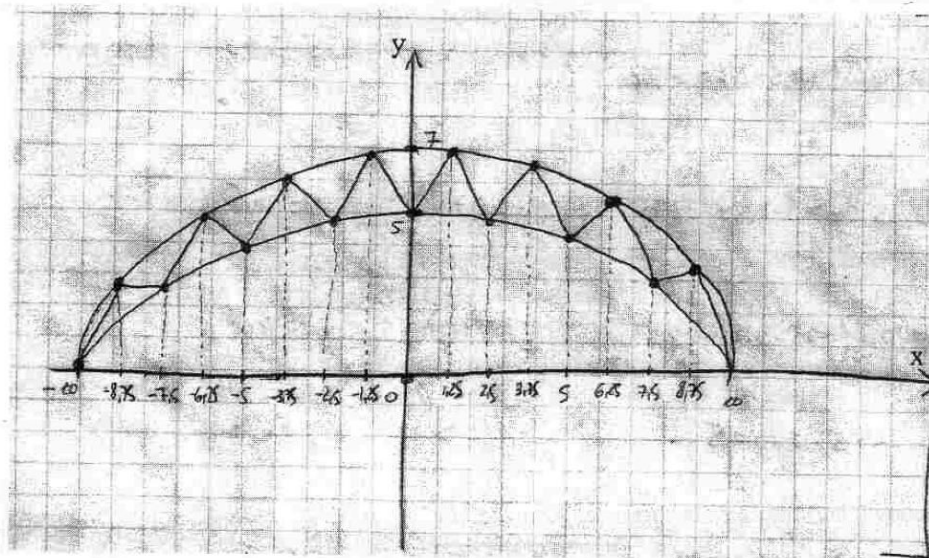
El semieje mayor, $a = 10$ y el semieje menor, $b = 7$.

Con estos datos conseguimos la fórmula de esta elipse:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1$$

→ *geométrica*

Aquí dibuje el gráfico de vuelta, para tomar cada intervalo y poder medir la longitud de cada barra:



Luego procedo, en primer lugar, a reemplazar cada valor que toma "x" en la parábola, en donde existe la punta de una barra. Debemos saber que ya que el vértice se encuentra en V (0,5), los valores de "y" que resulten de reemplazar "x", serán sumados al valor que toma "y" en el vértice, es decir, 5.

$$x = -10$$

$$y = -5 \longrightarrow y = 5 - 5 = 0$$

$$P_{p1}(-10,0)$$

$$x = -7,5$$

$$y \cong -2,8 \longrightarrow y = 5 - 2,8 = 2,2$$

$$P_{p2}(-7,5;2,2)$$

$$x = -5$$

$$y = -1,25 \longrightarrow y = 5 - 1,25 = 3,75$$

$$P_{p3}(-5;3,75)$$

$$x = -2,5$$

$$y \cong -0,3 \longrightarrow y = 5 - 0,3 = 4,7$$

$$P_{p4}(-2,5;4,7)$$

$$x = 0$$

$$y = 0 \longrightarrow y = 5 - 0 = 5$$

$$P_{p5}(0,5)$$

$$x = 2,5$$

$$y \cong -0,3 \longrightarrow y = 5 - 0,3 = 4,7$$

$$P_{p6}(2,5;4,7)$$

$$x = 5$$

$$y = -1,25 \longrightarrow y = 5 - 1,25 = 3,75$$

$$P_{p7}(5;3,75)$$

$$x = 7,5$$

$$y \cong -2,8 \longrightarrow y = 5 - 2,8 = 2,2$$

$$P_{p8}(7,5;2,2)$$

$$x = 10$$

$$y = -5 \longrightarrow y = 5 - 5 = 0$$

$$P_{p9}(10,0)$$

Luego, reemplazaré cada valor de "x" en la formula de la elipse, donde exista la punta de una barra sujeta al techo semielíptico:

$$\begin{aligned} x &= -8,75 & x &= 1,25 \\ y &\cong 3,4 & y &\cong 6,9 \\ P_{E1}(-8,75;3,4) & & P_{E5}(1,25;6,9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -6,25 & x &= 3,75 \\ y &\cong 5,46 & y &\cong 6,5 \\ P_{E2}(-6,25;5,46) & & P_{E6}(3,75;6,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -3,75 & x &= 6,25 \\ y &\cong 6,5 & y &\cong 5,46 \\ P_{E3}(-3,75;6,5) & & P_{E7}(6,25;5,46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -1,25 & x &= 8,75 \\ y &\cong 6,9 & y &\cong 3,4 \\ P_{E4}(-1,25;6,9) & & P_{E8}(8,75;3,4) \end{aligned}$$

Semántica

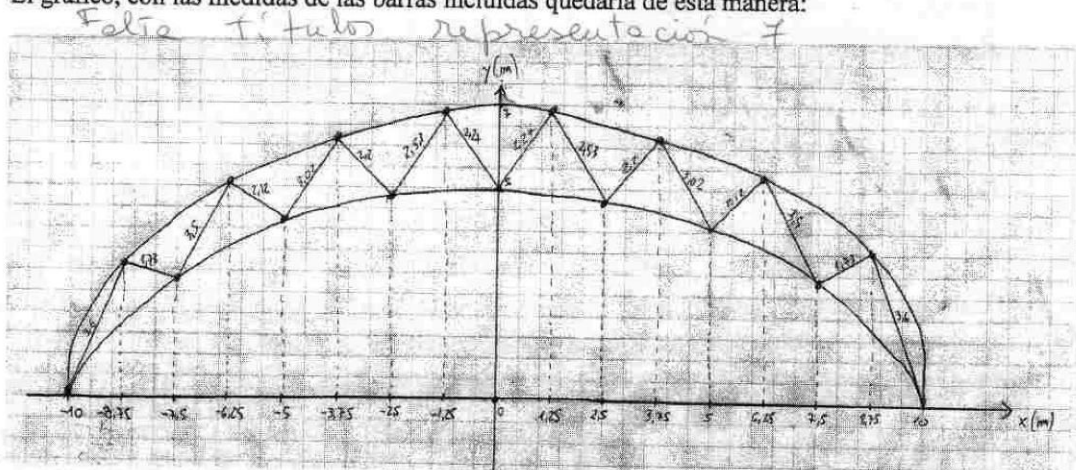
Finalmente, para calcular la longitud de cada barra, debo restar su punto inicial al final, y luego aplicar la fórmula para conseguir el módulo del vector resultante:

PUNTO A	PUNTO B	VECTOR RESULTANTE	LONGITUD DE LA BARRA ENTRE LOS PUNTOS
(-10,0)	(-8,75;3,4)	(1,25;3,4)	$l = \sqrt{1,25^2 + 3,4^2} \cong 3,6$
(-8,75;3,4)	(-7,5;2,2)	(1,25;-1,2)	$l = \sqrt{1,25^2 + (-1,2)^2} \cong 1,73$
(-7,5;2,2)	(-6,25;5,46)	(1,25;3,26)	$l = \sqrt{1,25^2 + 3,26^2} \cong 3,5$
(-6,25;5,46)	(-5;3,75)	(1,25;-1,71)	$l = \sqrt{1,25^2 + (-1,71)^2} \cong 2,12$
(-5;3,75)	(-3,75;6,5)	(1,25;2,75)	$l = \sqrt{1,25^2 + 2,75^2} \cong 3,02$
(-3,75;6,5)	(-2,5;4,7)	(1,25;-1,8)	$l = \sqrt{1,25^2 + (-1,8)^2} \cong 2,2$
(-2,5;4,7)	(-1,25;6,9)	(1,25;2,2)	$l = \sqrt{1,25^2 + 2,2^2} \cong 2,53$
(-1,25;6,9)	(0;5)	(1,25;-1,9)	$l = \sqrt{1,25^2 + (-1,9)^2} \cong 2,27$
(0;5)	(1,25;6,9)	(1,25;1,9)	$l = \sqrt{1,25^2 + 1,9^2} \cong 2,27$
(1,25;6,9)	(2,5;4,7)	(1,25;-2,2)	$l = \sqrt{1,25^2 + (-2,2)^2} \cong 2,53$
(2,5;4,7)	(3,75;6,5)	(1,25;1,8)	$l = \sqrt{1,25^2 + 1,8^2} \cong 2,2$
(3,75;6,5)	(5;3,75)	(1,25;-2,75)	$l = \sqrt{1,25^2 + (-2,75)^2} \cong 3,02$

(5;3,75)	(6,25;5,46)	(1,25;1,71)	$l = \sqrt{1,25^2 + 1,71^2} \cong 2,12$
(6,25;5,46)	(7,5;2,2)	(1,25;-3,26)	$l = \sqrt{1,25^2 + (-3,26)^2} \cong 3,5$
(7,5;2,2)	(8,75;3,4)	(1,25;1,2)	$l = \sqrt{1,25^2 + 1,2^2} \cong 1,73$
(8,75;3,4)	(10,0)	(1,25;-3,4)	$l = \sqrt{1,25^2 + (-3,4)^2} \cong 3,6$

Aclaración: Vale aclarar que todas las longitudes se miden en metros, pues esa es la unidad de medida que nos dieron.

El gráfico, con las medidas de las barras incluidas quedaría de esta manera:



La longitud total del material para construir todas las barras necesarias, lo calculamos sumando la longitud de cada barra, entonces:

$$L_{TOT} = 2 * 3,6m + 2 * 1,73m + 2 * 3,5m + 2 * 2,12m + 2 * 3,02m + 2 * 2,2m + 2 * 2,53m + 2 * 2,27m$$

$$L_{TOT} = 41,94m$$

INCOMPLETO. Falta RIA final (5)
coherencia